Interro de calcul
Espaces vectoriels et autres

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Soient les deux points du plan $A = (1,3)$ et $B = (2,4)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). En donner un vecteur normal et calculer sa distance à l'origine.

Correction : Voir interro précédente.

Question 2 : Factoriser $X^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ en produit de facteurs irreductibles. Dans chaque cas, donner ses racines. Ce polynôme est-il scindé sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

Correction : Voir interro précédente.

Question 3 : Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel. En donner une famille génératrice.

Correction : On écrit

$$F = \{(x,y,-x-y) | x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) | x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,-1)).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc que F est un espace vectoriel. Cela prouve aussi que $((1,0,1),(0,1,-1))$ en est une famille génératrice.

Question 4 : Soit

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x + & y + z + t = 0 \\ & y - z - 2t = 0 \\ & y + 2z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel. En donner une famille génératrice.

Correction : On échelonne le système par la méthode du pivot de Gauss, qui ne nécessite ici qu'une seule étape :

$$\begin{cases} x + & y + z + t = 0 \\ & y - z - 2t = 0 \\ & y + 2z + t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} x + y & +z + t = 0 \\ y & -z - 2t = 0 \\ & 3z + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

On déduit que

$$F = \left\{(-t,t,-t,t) |\ t \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(-1,1,-1,1)$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc est un espace vectoriel, et que $((-1,1,-1,1))$ en est une famille génératrice.

Question 5 : Donner des équations du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$.

Correction : Soit $u = (a,b,c)$, on écrit

$$u \in \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1)) \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } u = \lambda(1,1,1) + \mu(0,1,1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a = \lambda \\ b = \lambda + \mu \\ c = \lambda + \mu \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = b \\ \lambda = a \\ b - c = 0 \end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet une solution si et seulement si l'équation de compatibilité $b - c = 0$ est vérifiée. En conclusion,

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 |\ b = c\}.$$

Question 6 : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 est-il un espace vectoriel ? (Justifier la réponse).

Correction : Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ ne contient pas le polynôme nul, ce n'est donc pas un espace vectoriel. On peut également vérifier qu'il n'est pas stable par addition puisque $X^2 + (-X^2) = 0$ qui n'est pas de degré 2.