Interro de calcul 2
Outils maths (trigo et dérivées), correction

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a : $\cos(x+\frac{7\pi}{6}) = \cos(\frac{7\pi}{6})\cos x - \sin(\frac{7\pi}{6})\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.

Question 2 : On a $\sin x = \frac{1}{2} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Question 3 : Si $\cos x = \frac{1}{4}$, alors on a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{15}{16}$ d'où $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Dériver les fonctions suivantes : (On ne parlera pas de domaine de définition).

Question 4 : Notons $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{e^x}$. Alors

$$f'(x) = e^x \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

Question 5 : On a $\sin' = \cos$, et l'équation de la tangente à cette fonction en $\frac{\pi}{4}$ est

$$y = \sin(\frac{\pi}{4}) + (x - \frac{\pi}{4})\sin'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}).$$

Question 6 : Posons $f(x) = x^3 - 2x + 1$, de sorte que $h = \cos \circ f$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x) \times (-\sin(f(x))) = -(3x^2 - 2) \times \sin(x^3 - 2x + 1).$$

Question 7 : On a $\int_0^\pi t \sin t \,\mathrm{d}t = [t \times (-\cos t)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t \,\mathrm{d}t = \pi + [\sin t]_0^\pi = \pi$.

Question 8 : Une fonction y est solution si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{3t}$.
La condition $y(0) = 1$ équivaut à $\lambda = 1$.

Question 9 : L'équation caractéristique associée est $r^2 + 16 = 0$. Son discriminant est $\Delta = -4 \times 16 = -64$. Daprès le cours, les solutions sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux constantes.

Question 10 : Posons $f(x) = \sqrt{1+x}$, on a $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$ d'où d'après le cours :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$