

# Interro de calcul 4

## Calculs algébriques

*Ceci est un entraînement.*

**Question 1 :** On a  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

**Question 2 :** On a

$$\frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n \times (n+1)} = \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

**Question 3 :** C'est une somme géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , qui part de 1 ( $k=0$ ) :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

**Question 4 :** On a  $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ .

**Question 5 :** On a  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

**Question 6 :** On a  $X^2 + X + 1 = X^2 + X + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ .

**Question 7 :** On a  $(\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x))$

**Question 8 :** On a  $-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$  d'où  $z = \pm 2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$ .