Interro de calcul 5
Fonctions et logiques

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Introduisons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{e^x}$. Alors on a $g = f \circ f$. Ainsi, g est croissante en tant que composée de fonction croissante, et on par dérivation d'une composée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) = e^x \times e^{e^x} = e^{x+e^x}.$$

Question 2 : Introduisons $D :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $D(x) = x - \ln(1+x)$. On a

$$\forall x > -1, \quad D'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Le dénominateur étant positif sur $]-1, +\infty[$, on a :

$$D'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$

Ainsi la fonction D est décroissante sur $]-1, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$, et donc minimum en 0 (faire le tableau de variations), ainsi

$$\forall x > -1, \quad D(x) \geqslant D(0) = 0.$$

Cela est équivalent à l'inégalité demandée.

Question 3 : On reconnait un taux d'accroissement : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$, d'où par définition du nombre dérivée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Question 4 : Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La loi de Morgan indique que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Question 5 : Soient P et Q deux propositions, la contraposée de « $P \implies Q$ » est « $\neg Q \implies \neg P$ ».

Question 6 : Voir le cours

Question 7 : Voir le cours.

Question 8 : On a $f(1) = f(-1) = 1$ donc f n'est pas injective, car deux valeurs distinctes ont la même image.

En revanche, pour $y \in \mathbb{R}_+$ fixé, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On trouve que $x = y$ convient, en effet $f(x) = |y| = y$ car $y \geqslant 0$. Notez que $x = -y$ convient aussi. Ainsi, tout point y de $\mathbb{R}_+$ a un antécédant (et même deux si $y > 0$, à savoir y et $-y$). Donc la fonction est surjective.