Interro de calcul 6
Fonctions usuelles

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Les fonctions

$$\text{Arcsin} : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{Arccos} : [-1,1] \mapsto [0,\pi] \quad \text{et} \quad \text{Arctan} : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

sont bijectives.

Question 2 : On a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\text{Arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ainsi que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Question 3 : On a $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. Posons $u(x) = x\ln(x)$, de sorte que $f(x) = e^{u(x)}$, et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Or par dérivation d'un produit :

$$u'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Donc

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}.$$

Question 4 : Posons $u(x) = x^3$ et $g(x) = \text{ch}(x^3) = \text{ch}(u(x))$. Par dérivée d'une composée, on a $\text{ch}(u)' = u'\,\text{ch}(u)$, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2\,\text{sh}(x^3).$$

Ainsi g' est du signe de sh. La fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, \infty[$. De plus, on a par composition de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Donner son tableau de variation.

Question 5 : On a :

$$\operatorname{ch} x = 2 \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} - 4 = 0.$$

Effectuons le changement d'inconnue $X = e^x > 0$. Alors x est solution si et seulement X est solution de

$$X^2 - 4X + 1 = 0,$$

d'inconnue $X > 0$. On trouve deux solutions :

$$X_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } X_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Ces deux solutions étant positives, on déduit que l'on a deux solutions à l'équation initiale :

$$x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}) \text{ et } x_2 = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Question 6 : L'inéquation $\ln(x-1) + \ln(5-x) \leqslant \ln 3$ a du sens lorsque $x - 1 > 0$ et $5 - x > 0$, donc lorsque $x \in]1, 5[$. Puisque la fonction exponentielle est croissante et bijective, on sait que $a \leqslant b \iff e^a \leqslant e^b$, on compose l'inégalité avec l'exponentielle et obtient :

$$\ln(x-1) + \ln(5-x) \leqslant \ln 3 \iff e^{\ln(x-1)} e^{\ln(5-x} \leqslant e^{\ln(3)} \iff (x-1)(5-x) \leqslant 3.$$

Introduisons le polynôme

$$P(x) = 3 - (x-1)(5-x) = x^2 - 6x + 8.$$

Le calcul du discriminant fournit ses racines : 2 et 4. Ainsi, P est positive sauf entre ses racines. Conclusion, en se souvenant que le domaine d'étude est $]1, 5[$:

$$\ln(x-1) + \ln(5-x) \leqslant \ln 3 \iff x \in]1, 2] \cup [4, 5[.$$