Interro de calcul et cours 8
Matrices

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Le calcul donne

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Question 2 : Etant donné trois entiers n, p, q dans $\mathbb{N}^*$, on considère les matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in M_{p,q}(\mathbb{R})$.

La matrice produit $C = AB$ est de taille (n, q), c'est-à-dire que $C \in M_{n,q}(\mathbb{R})$. On a de plus, pour un couple $(i, j) \in [\![1\,, n]\!] \times [\![1\,, q]\!]$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Question 3 : On introduit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{cases} 3x + 3y - 6z = -3 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases} \iff AX = B, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On observe que $L1 = -3L2$, c'est-à-dire que les lignes sont équivalentes. On a donc :

$$\begin{cases} 3x + 3y - 6z = -3 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases} \iff 3x + 3y - 6z = -3.$$

L'ensemble des solutions est un plan de $\mathbb{R}^3$, de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et qui passe par le point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En particulier il y a une infinité de solutions.

Question 4 : Soit une matrice de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

On a $D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}$. De plus la matrice D est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ sont non nuls. On a alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{pmatrix}$.

Question 5 : On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, on a $I_3 \times N = N \times I_3 = N$, donc on peut appliquer la formule de binôme de Newton. Or on a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0.$$

On a donc

$$M^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k,$$
$$= I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2.$$

et donc, puisque $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$