Feuille d'exercices 10
Dérivabilité

Exercice 1 ●○○ — Vrai ou faux ? Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en citant le cours (ou en faisant une preuve), ou en exhibant un contre-exemple :

1. Si une fonction admet une limite en un point, alors elle est définie en ce point.
2. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, alors sa dérivée est impaire (et réciproquement).
3. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ a sa dérivée paire, alors elle est impaire.
4. Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée est continue.
5. Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet une tangente horizontale en un extremum.
6. Sur un intervalle $[a,b]$, si une fonction dérivable admet un maximum, alors sa dérivée s'annule en ce point.

Exercice 2 ●○○ — Une fonction auxiliaire Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e\ln(x) - x$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire une comparaison entre π^e et e^π.

Exercice 3 ●○○ — Vrai ou faux ? Etudier la « régularité » des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition (c'est-à-dire jusqu'où va leur régularité dans les différentes notons de contnuité et de dérivabilité) :

1. $x \mapsto \sqrt{-x^2+x+6}$.
2. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } \; x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$
3. $x \mapsto x\sqrt{|x|}$.

Exercice 4 ●●○ — Définie par morceaux Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{si } \; x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ be^{bx} - (c+12)x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Donner une CNS pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 ●○○ — Formule de Leinbitz et astuce Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^4 e^{5x}$.

Exercice 6 ●●● — Une fonction plate qui décolle Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n et un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée n-ième de f est de la forme
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^p} e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. En déduire que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner ses dérivées en 0.

Exercice 7 ●●○ — Valeur absolue d'une fonction Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

1. Montrer que si $f(a) \neq 0$, la fonction $|f|$ est dérivable en a.
2. On suppose que $f(a) = 0$. A l'aide d'un développement limité en 0, montrer que $|f|$ admet des dérivées à gauche et à droite en 0, et dire si $|f|$ est dérivable en 0 (on distinguera les cas selon la valeur de $f'(a)$).
3. En déduire une CNS pour que $|f|$ soit dérivable en a.

Exercice 8 ●●○ — Une forme indeterminée Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Déterminer

$$\lim_{x \to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x-a}.$$

Exercice 9 ●●○ — Inverser une fonction Soit la fonction f définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$.
2. Déterminer f' et montrer que $f\in\mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$.
3. Montrer que f est dérivable en 0, mais pas $\mathscr{C}^1$.
4. Etablir les variations de f sur $[-1,1]$. montrer que f établit une bijection sur un ensemble J à préciser.
5. Montrer que $f^{-1}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, et déterminer $(f^{-1})'$.

Exercice 10 ●●○ — Un encadrement du logarithme Montrer que

$$\forall x>0,\quad \frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.$$

En déduire un encadrement de $\ln(1,01)$.

Exercice 11 ●○○ — Des propriétés pour f' Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et dérivable sur $]0,1[$ telle que

$$f(0)=0 \text{ et } \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\neq 0.$$

1. Montrer que pour $x\neq 0$, on a $f(x)\neq 0$.
2. Montrer que f garde un signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 12 ●●● — Couper l'exponentielle Pour un polynôme P, on s'intéresse à l'équation

$$P(x)=e^x,$$

1. Euder le cas où P est une fonction affine.
2. Montrer par récurrence que l'équation a au plus $n+1$ solutions, où n est le degré de P (pour l'hérédité, on pourra supposer par l'absurde que l'équation $P(x)=e^x$ avec P de degré $n+1$ admet au moins $n+3$ solutions).

Exercice 13 ●●○ — Une histoire de corde Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0)=f(1)=f'(0)=0.$$

On veut montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe de f en c passe par l'origine.

1. Traduire le problème par une équation sur c.
2. En étudiant la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g:x\mapsto\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } & x=0\end{cases},$$

démontrer le résultat.

Exercice 14 ●●○ — Extension de Rolles : se ramener à un segment

1. Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(a).$$

   a. On souhaite définir la fonction g sur $]0,1]$ par $g(x)=f(\frac{1}{x}+a-1)$. Vérifier que cette fonction est bien définie et dérivable. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0.
   b. En déduire qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$. Quelle est l'idée derrière la fonction g ?
2. On suppose maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

   En introduisant une fonction basée sur le changement de variable $x=\tan t$, avec $x\in\mathbb{R}$, montrer avec des idées similaires que f' s'annule en au moins un point.
3. Quel autre stratégie visuelle aurait-on pu aussi adapter pour montrer ces théorèmes de Rolles "généralisés" ?

Exercice 15 ●●○ — Relation de récurrence

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases}u_{n+1}=4-\frac{1}{4}\ln(u_n),\ n\geqslant 0\\ u_0=\frac{7}{2}.\end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\in[3,4]$.

2. Introduire une fonction f de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$, et montrer que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$, dans l'intervalle $[3, 4]$. On note α un tel point fixe.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{12}|u_n - \alpha|.$$
4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

Exercice 16 ●●○ **En passant par les complexes** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = x^2 e^{\frac{i}{x}}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on note encore f.
2. Montrer que f est dérivable en 0, mais pas $\mathscr{C}^1$.