Feuille d'exercices 12
Primitives et équations différentielles

Exercice 1 ●○○ — Trouver la composée (ou pas) Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de définition :

1. $x \mapsto -6xe^{x^2}$ **2.** $x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ **3.** $x \mapsto -x^2\sin(x^3)$ **4.** $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
5. $x \mapsto \frac{-2e^x}{e^x+3}$ **6.** $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ **7.** $x \mapsto \frac{x+23}{x^2-3x-10}$
8. $x \mapsto \frac{3}{x}\ln x$ **9.** $x \mapsto \frac{x^3}{1+x}$ **10.** $x \mapsto \tan^2 x$

Exercice 2 ●○○ — Transformer la fonction Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{-2x^2+12x-18}$ **2.** $x \mapsto \frac{x-7}{-2x^2+12x-18}$ **3.** $x \mapsto \frac{3}{-6x^2-x+12}$
4. $x \mapsto \frac{3x-\frac{11}{4}}{-6x^2-x+12}$ **5.** $x \mapsto \frac{1}{8x^2-48x+74}$ **6.** $x \mapsto (6x^2-2x+6)e^{2x}$
7. $x \mapsto e^{-3x}(6\cos(2x)-5\sin(2x))$

Exercice 3 ●○○ — IPP Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ **2.** $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ **3.** $x \mapsto 3x^2\ln(1+x)$
4. $x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$ **5.** $x \mapsto (\sin x)e^x$ (avec ou sans IPP) **6.** $x \mapsto (x^2+1)\sin(2x)$

Exercice 4 ●●○ — On désire calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 2}dx$$

1. Pour $x \in]-\pi,\pi[$, on note $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

2. En déduire que

$$I = \int_a^b \frac{1}{u^2+u+1}du$$

avec a et b à déterminer.

3. En déduire I.

Exercice 5 ●●○ — Une histoire de composées On souhaite définir la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{x^3} e^{\sqrt{t}}dt.$$

Donner le domaine de définition et celui de dérivabilité de f. Calculer la dérivée sur le domaine de dérivabilité.

Exercice 6 ●●○ — Changements de variable Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ **2.** $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$ **3.** $x \mapsto \frac{1}{x+x\ln x}$
4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$ **5.** $x \mapsto \frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}$

Exercice 7 ●●○ — EDL1 Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'(x) - 2xy(x) = 6x$ sur $\mathbb{R}$. Et avec $y(0) = 1$?
2. $y'(x) + \frac{2}{x^3}y(x) = (-2x+3)e^{\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. Et avec $y(0) = e$?
3. $xy'(x) - y(x) = x\ln x$ sur $]0,+\infty[$. Et avec $y(1) = -3$?
4. $(x+1)y'(x) + xy = 2x^2 - x + 2$ sur $]-1,+\infty[$. Et avec $y(1,5) = 5e^{1,5}$?

Exercice 8 ●●○ — **EDL2** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = x + \sin x - e^{3x} + e^{4x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x} + (x-1)e^{2x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = 3\sin(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + 25y(x) = e^{-4x}\cos(5x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 9 ●●● — **Equations fonctionnelles**

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(x) + \int_0^2 f(t)dt \ \text{ et } f(1) = 3.$$

Exercice 10 ●●● — **Changement de variable dans une equadiff** On considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall x > 0, \quad x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 6x - 1 \tag{1}$$

1. Cette équation différentielle rentre-t-elle dans le cadre du cours ?
2. Nous allons effectuer le changement de variable $x = e^t$. Etant donnée une solution y de (1), on introduit pour cela la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$. Quel est le domaine de définition de la fonction z ? Montrer qu'elle est deux fois dérivable sur son domaine de définition.
3. Exprimer y en fonction de z, puis les dérivées première et seconde de y en fonction de celles de z.
4. Démontrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 6e^t - 1.$$
5. Résoudre cette équation différentielle, puis en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale (1).