

Feuille d'exercices 16

Polynômes

— **Exercice 1** ●○○ — **Equations sur des polynômes** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
- $(P')^2 = 4P$.

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P .

— **Exercice 2** ●○○ — **Interpolation et contraintes** Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connaît P , ainsi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?

— **Exercice 3** ●●○ — **Une équation de polynôme** Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P'_n = X^n$.
Si oui, les déterminer.

— **Exercice 4** ●●○ — **Factorisation(s)**
Factoriser $(X^2 - 3X + 2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Idée : Dans \mathbb{C} , vous savez factoriser $a^2 + b^2$.

— **Exercice 5** ●●○ — **Divisions euclidiennes**
Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

- $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
 - $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
- $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geq 2$).
 - $A = X^n$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 2$). On pourra dériver ou utiliser le binôme.
 - $A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $B = (X - 1)^2$ (avec $n \geq 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

— **Exercice 6** ●●○ — **Critère de divisibilité**

Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X - 1)^2$.

— **Exercice 7** ●●○ — **Encore un critère de divisibilité**

Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Idée : On peut penser au complexe j , qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).

— **Exercice 8** ●●○ — **Polynômes interpolateurs de Lagrange**

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n + 1$ -uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_j - a_i)}$$

- Déterminer, pour chaque $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, ce que vaut $L_i(a_j)$.
- Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n + 1$ points (a_0, \dots, a_n) .

— **Exercice 9** ●●○ — **Polynômes de Tchebychev**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

- Déterminer P_0 , P_1 et P_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si P_n existe, il est unique.
- Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

- En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.
- En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser.

— **Exercice 10** ●● — **Un polynôme déjà vu**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n est scindé à racines simples.

Idée : Que dire de P'_n ?

— **Exercice 11** ●○○ — **Lever une indétermination**

Soit la fonction polynomiale

$$P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5.$$

1. Ecrire le développement de Taylor de P en 1.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

— **Exercice 12** ●●○ — **Décomposition**

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles :

1. $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

3. $\sum_{k=0}^7 X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

4. $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$ et $P'(2)$).

5. $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

— **Exercice 13** ●○○ — **Ordre de multiplicité d'une racine**

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

1. Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.

2. Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

— **Exercice 14** ●●○ — **Encore un critère de divisibilité**

Soient a, b et c trois réels, et

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$

1. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P .

2. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P , et que P n'admette pas de racine réelle.

— **Exercice 15** ●●○ — **Polynômes et racines de l'unité**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$P_n = (1+X)^n - (1-X)^n.$$

1. Calculer P_n pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

2. Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).

3. P_n est-il divisible par X ?

4. a. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si

$$\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n = 1.$$

b. résoudre cette équation dans \mathbb{C} (discuter selon la parité de n).

c. Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

— **Exercice 16** ●●○ — **Polynôme annulateur et puissances d'une matrice**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.