Feuille d'exercices 16
Polynômes

Exercice 1 ●○○ — Equations sur des polynômes Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
2. $(P')^2 = 4P$.

Idée : commencez par considérer le degré d'une solution P.

Exercice 2 ●○○ — Interpolation et contraintes Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que

$$P(2) = 5, \quad P'(2) = 6, \quad P''(2) = -8, \quad P^{(3)}(2) = -18, \quad \text{et} \quad P(3) = 4.$$

Idée : On connait P, ansi que ses dérivées, au point 2. Quelle formule fait intervenir ces quantités ?
Correction : On écrit la formule de Taylor pour P en 2, à l'ordre 3. Comme P est de degré au plus 3, on sait que le reste de la formule de Taylor est nul :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k = P(2) + P'(2)(X-2) + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(X-2)^3$$

Ainsi, si un tel polynôme existe, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} P(X) &= 5 + 6(X-2) - \frac{8}{2}(X-2)^2 - \frac{18}{6}(X-2)^3 \\ &= 5 + 6(X-2) - 4(X-2)^2 - 3(X-2)^3 \end{aligned}$$

On vérifie que la conditon $P(3) = 4$ est bien vérifiée par ce polynôme. Ainsi, il y a bien un polynôme qui vérifie ces contraines, et il est unique.
Remarque : on n'a pas besoin d'expliciter les coefficients de P. En fait, on a donné ses coefficients (coordonnées) dans la base de polynômes échelonnés

$$(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3).$$

On peut retenir que la formule de Taylor permet d'écrire un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base "translatée" $(1, (X-\lambda), \dots, (X-\lambda)^n)$, et que les coefficients se trouvent à partir des dérivées en λ.

Exercice 3 ●●○ — Une équation de polynôme Soit $n \in \mathbb{N}$, existe-t-il un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.
Si oui, les déterminer.

Exercice 4 ●●○ — Factorisation(s)
Factoriser $(X^2-3X+2)^2 + X^2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
Idée : Dans $\mathbb{C}$, vous savez factoriser a^2+b^2.

Exercice 5 ●●○ — Divisions euclidiennes
Effectuer les divisions de A par B dans les cas suivants :

1. **a.** $A = -8X^5 - 10X^4 + 5X^2 - 4X + 8$ et $B = X^3 + 2X^2 - X + 1$.
   b. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X + 1 - i$.
2. **a.** $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$ (avec $n \geqslant 2$).
   b. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 2$). On pourra dériver ou utiliser le binôme.
   c. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$ (avec $n \geqslant 3$). On pourra utiliser la formule de Taylor.

Exercice 6 ●●○ — Critère de divisibilité
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une CNS sur a et b pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Idée : On peut calculer le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^2$.

Exercice 7 ●●○ — Encore un critère de divisibilité
Donner une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que X^2+X+1 divise $X^{2n} + X^n + 1$.
Idée : On peut penser au complexe j, qui vérifie $j^3 = 1$ (entre autre).
Correction : On effectue la division euclidienne de $A = X^{2n} + X^n + 1$ par $B = X^2 + X + 1$, en vue de calculer le reste : il existe deux polynômes Q et R tels que

$$X^{2n} + X^n + 1 = (X^2+X+1)Q + R$$

avec $\deg R \leqslant 1$, c'est-à-dire $R = aX + b$ où a et b sont deux constantes à trouver.
Les racines de X^2+X+1 sont j et j^2 (qui vaut $\bar{j}$), avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On évalue en ces racines :

$$\begin{cases} aj + b = j^{2n} + j^n + 1 \\ aj^2 + b = j^{4n} + j^{2n} + 1 \end{cases}$$

Or $j^4 = j \times j^3 = j$ et donc $j^{4n} = (j^4)^n = j^n$, d'où

$$j^{4n} + j^{2n} + 1 = j^{2n} + j^n + 1.$$

Ainsi on a

$$aj + b = aj^2 + b \iff a(j - j^2) = 0 \iff a = 0.$$

On a finalement $b = j^{2n} + j^n + 1$, que l'on doit calculer. Puisque $j^3 = 1$, c'est la congruence de n modulo 3 qui va jouer un rôle. On écrit

$$n = 3p + r \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{0, 1, 2\}.$$

On a alors $j^{3p} = (j^3)^p = 1$, et donc

$$j^n = j^{3p+r} = j^r \text{ et } j^{2n} = j^{6p+2r} = j^{2r}.$$

On a la disjonction de cas suivante :

- Si $r = 0$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = 3$. Donc le reste R vaut 3 et est non nul.
- Si $r = 1$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^2 + j + 1 = 0$. Donc le reste R vaut est nul.
- Si $r = 1$, on a $b = j^{2n} + j^n + 1 = j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$. Donc le reste R vaut 3 est nul.

En conclusion, $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ si et seulement si 3 ne divise par n.

Remarque : La preuve et le critère sont les mêmes que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors autant utiliser les complexes !

Exercice 8 ●●○ — Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ un $n+1$-uplet de nombres deux à deux distincts. On définit pour $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1. Déterminer, pour chaque $(i, i_0) \in [\![0, n]\!]^2$, ce que vaut $L_i(a_{i_0})$.

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i.$$

On pourra comparer ces deux polynômes sur les $n+1$ points $(a_0, \dots, a_n)$.

Exercice 9 ●●● — Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montre qu'il existe un unique polynôme P_n qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos nx = P_n(\cos x),$$

et l'étudier.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si P_n existe, il est unique.

3. Montrer par une récurrence forte que P_n existe et vérifie

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

4. En déduire le degré de P_n et son coefficient dominant.

5. En étudiant l'équation $\cos(nx) = 0$, d'inconnue $x \in [0, \pi]$, donner l'ensemble des racines de P_n et le factoriser.

Exercice 10 ●●○ — Un polynôme déjà vu

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Idée : Que dire de P_n' ?

Correction : On constate que $\deg(P_n) = n$. Ainsi, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P_n a n racines comptées avec multiplicités. Afin de voir si elles sont simples, on calcule P_n'. On a

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On effectue un glissement d'indice :

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1} = P_n - X^n.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $m \geqslant 2$ de P_n, on a

$$P_n(\alpha) = 0 \text{ et } P_n'(\alpha) = 0,$$

ce qui est absurde si on évalue l'identité précédente en α. Ainsi toutes les racines sont simples et P_n est scindé à racines simples.

Exercice 11 ●○○ Lever une indetermination

Soit la fonction polynomiale

$$P(x) = 2x^5 - 15x^4 + 28x^3 - 14x^2 - 6x + 5.$$

1. Ecrire le développement de Taylor de P en 1.

2. En déduire $\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 12 ●●○ Décomposition

Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irreductibles :

1. $X^5 - X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

3. $\sum_{k=0}^{7} X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

4. $X^5 - 8X^4 + 9X^3 + 58X^2 - 164X + 120$ dans $\mathbb{R}[X]$ (calculer $P(2)$ et $P'(2)$).

5. $X^5 + 2X^4 - X^3 - 8X^2 - 10X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 ●○○ Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, et

$$P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

1. Montrer que 1 est racine de P et préciser l'ordre de cette racine.

2. Donner un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que P est divisible par $(X-1)^m$ mais pas par $(X-1)^{m+1}$.

Exercice 14 ●●○ Encore un critère de divisibilité

Soient a, b et c trois réels, et

$$P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 15$$

1. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P.

2. Donner une CNS sur a, b, c pour que $X^2 + 3$ divise P, et que P n'admette pas de racine réelle.

Exercice 15 ●●● Polynômes et racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$P_n = (1+X)^n - (1-X)^n.$$

1. Calculer P_n pour $n \in [\![1\,,4]\!]$.

2. Déterminer le coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré).

3. P_n est-il divisible par X ?

4. **a.** Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1.$$

b. résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ (discuter selon la parité de n).

c. Décomposer P_n dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 ●●○ Polynome annulateur et puissances d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2. Calculer A^n en utilisant la division euclidienne.

Exercice 17 ●●○ Décomposition en éléments simples

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. **a.** $F(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$. **b.** $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.

2. Même question, sur $\mathbb{C}$:

a. $F(X) = \frac{2X}{X^2+1}$. **b.** $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1}$.

3. $F(X) = \frac{X-2}{X^2(X-1)^2}$ (à chercher sous la forme $\frac{a_2}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_2}{(X+1)^2} + \frac{b_1}{X+1}$).

4. $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$ sur $\mathbb{R}$ (à chercher sous la forme $\frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$).

5. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ (factoriser le nnumérateur et s'inspirer de ce qui précède).