Feuille d'exercices 17
Espaces vectoriels, part I

Exercice 1 ●○○ **Un exemple facile** Montre que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x,y)|x+y=0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y)|x-y=0\}$$

sont des espaces vectoriels. L'ensemble $F \cup G$ est-il un espace vecoriel ?

Exercice 2 ●○○ **Des SEV à « vues »**

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   - **b.** L'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en π.
   - **c.** L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$.
   - **d.** L'ensemble des polynômes tels que $P(X+1) = 2P(X)$ et $P(3) = 0$.
   - **e.** L'ensemble des fonctions croissantes.
   - **f.** L'ensemble des fonctions monotones.
   - **g.** L'ensemble des fonctions paires.
   - **h.** L'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a\cos(x-\varphi)$, avec $(a,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.
   - **i.** L'ensemble des fonctions bornées.
   - **j.** L'ensemble des fonctions majorées.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E. Le cas échéant, en donner une base.
   - **a.** $F = \{(x,y,z)|2x+y+4z=1\}$.
   - **b.** $F = \{(x,y,z)|x-y+3z=0\}$.
   - **c.** $F = \{(x,y,z)|5x-3y+2z \geqslant 0\}$.
   - **d.** $F = \{(x,y,z)|x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz \geqslant 0\}$ (attention au piège).
   - **e.** $F = \{(x,y,z)|x = yz\}$.

Exercice 3 ●○○ **Union de SEV** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le but de cet exercice est de montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectorielde E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1. Supposons l'une des deux inclusions vraies. Que dire de $F \cup G$? Conclure.
2. Supposons réciproquement que qu'on n'a pas « $F \subset G$ ou $G \subset F$ ».
   - **a.** Traduire cette hypothèse avec des quantificateurs.
   - **b.** Conclure en utilisant la formule $x = (x+y)+(-y)$.

Exercice 4 ●○○ **Une famille de trois vecteurs** Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et les deux vecteurs $e_1 = (1,2,1)$ et $e_2 = (1,0,\alpha)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (e_1, e_2) est-elle une famille libre ?
2. Soit $e_3 = (-3,-10,1)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.
3. Qu'en déduire dans ce cas pour la famille (e_1,e_2,e_3) ?

Exercice 5 ●○○ **Les équadiffs linéaires homogènes d'ordre 1 revisitées** On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0,$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction inconnue. Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de la forme $\mathrm{Vect}(y_0)$, où on rappelera y_0 en fonction de a.

Exercice 6 ●○○ **Exemple de familles de $\mathbb{R}^3$** Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ? Génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

1. La famille $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,-1,-1)$, $e_3 = (2,1,1)$ et $e_4 = (7,-5,18)$.
2. La famille $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (1,-1,-1)$, $e_3 = (2,1,1)$.

Exercice 7 ●○○ **Familles libres** Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1,-e_4,e_3)$. **2.** (e_1,e_4). **3.** (e_1).
4. $(2e_1-e_2, e_2+e_3, e_3-e_4, e_4)$. **5.** $(e_2+e_3, e_3, e_4, -e_2+2e_3)$.

Exercice 8 ●○○ Familles de $\mathbb{R}^3$ Soient $e_1 = (-2, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, -3)$, $e_3 = (1, 4, 7)$ et $e_4 = (1, 1, 2)$.

1. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille (e_1, e_2) est-elle une base de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$?
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 9 ●○○ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $\text{Vect}((0, 3, 2, 1), (2, -2, -6, 4), (4, 5, 4, 3), (2, 1, 1, 1))$
2. $\text{Vect}((1, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 1), (1, -5, 4, -1), (3, -8, 7, 1), (-4, 20, -16, 4))$.

Dans chaque cas, donner des équations caractérisant le sous-espace vectoriel engeandré.

Exercice 10 ●●○ Famille de matrices Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. Soit $F = \text{Vect}(I_3, M, M^2)$.

1. Donner une telle matrice (on pensera à une matrice triangulaire stricte).
2. Montrer que la famille (I_3, M, M^2) est libre.
3. En déduire que cette famille est une base de F.

Exercice 11 ●●○ Sous-espace supplémentaires Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E, x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. En donner des bases respectives.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. A-t-on $E = F + G$?
4. A-t-on $E = F \bigoplus G$?
5. Interpréter la question précédente.

Exercice 12 ●○○ Familles de $\mathbb{R}^3$ Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi que les vecteurs $e_1 = (3, 2, -3)$, $e_2 = (1, 4, 1)$, $e_3 = (-1, -14, -7)$ et $e_4 = (10, 0, -14)$.

1. A-t-on $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_3, e_4)$.
2. Décrire $\text{Vect}(e_1, e_2)$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations cartésiennes.
3. Donner un supplémentaire de $\text{Vect}(e_1, e_2)$. Est-ce un supplémentaire de $\text{Vect}(e_3, e_4)$?

Exercice 13 ●●○ Sous-espace supplémentaires, bis Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E, x = 2y = -z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in E, 3x - y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 14 ●●○ Sous-espace supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in E, \begin{cases} x + y + 2z - 2t = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E, x - y - z - 5t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E.
4. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.
5. Quelle stratégie utiliser si on vous demande un supplémentaie de F dans $\mathbb{R}^4$?