Feuille d'exercices 18
Géométrie dans l'espace

Sauf mention contraire, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé fixé.

Exercice 1 ●○○ — Points coplanaires (ou pas) Soient les points $A(3,3,5)$, $B(0,4,1)$, $C(4,2,11)$, $D(2,3,6)$ et $E(3,0,-1)$.

1. Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
2. On veut savoir si les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires, c'est-à-dire si elles se coupent selon un angle droit.
   a. (Méthode du lycée) Donner une équation paramétrique de ces deux droites. Conclure.
   b. (Méthode de cette année). Les points B, C, D et E sont-ils coplanaires ? Conclure.
   Idée : Quel nouveau outil permet de savoir si des vecteurs sont coplanaires ?
3. On veut savoir si A, B, C et D sont coplanaires.
   a. (Méthode du lycée) Donner une équation cartésienne du plan (ABC). Conclure.
   b. (Méthode de cette année). Voir idée précédente.
4. Donner une équation paramétrique de la droite orthgonale au plan (ABC) et passant par E.

Exercice 2 ●○○ — Distance à un plan ou à une droite

1. Calculer la distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y+z-2=0$, et déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance du point $B(1,2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(1,-1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2,1,4)$, et déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3 ●○○ — Intersection de droites à paramètre Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soient les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par les équations suivantes :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x+\lambda z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{D}' : \begin{cases} y+2z=0 \\ -x+z=3 \end{cases}.$$

Déterminer les réels λ tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun.

Exercice 4 ●●○ — Points equistants à deux plans Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+6y-9z+10=0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $-4x+7y-4z+8=0$.
Déterminer l'ensemble des points équidistants à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Exercice 5 ●○○ — Angles entre deux plans Reprenons les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'exercice précédent. Déterminer l'angle entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ (on pourra noter que c'est l'angle entre leurs vecteurs normaux).

Exercice 6 ●●○ — Equation de sphère
On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$x^2-6x+y^2+4y+z^2-2z=35.$$

1. Décrire $\mathcal{S}$ géométriquement, en donnant ses éléments caractéristiques.
2. Montrer que $B(5,1,7)$ appartient à $\mathcal{S}$.
3. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en B
4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$, la section de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $2x+3y+6z+\alpha=0$ est un cercle de rayon 3.

Exercice 7 ●●○ — Etudier un tetraèdre
Soit $\mathcal{T}$ un tetraèdre régulier de côté 1.

1. Calculer sa hauteur et son volume (rappel : ce volume vaut $\frac{1}{3}$base$\times$hauteur).
2. Combien d'arêtes a ce solide ? Déterminer la distance entre deux arêtes non coplanaires. (On pourra d'abord montrer que cette distance est celle entre les milieux des arêtes).

Exercice 8 ●●● — Une equation originale

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse à l'équation

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}, \quad \text{d'inconnue } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

1. **a.** Résoudre le problème si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.

b. Résoudre le problème si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

c. Résoudre le problème si $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

2. On suppose désormais $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

a. Résoudre le problème si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b. On suppose désormais $\vec{u} \perp \vec{v}$.

(i) Justifier que $\vec{x}$ apartient au plan engeandré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Idée : Quelle est une normale à ce plan ?

(ii) En déduire l'existence d'un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

(iii) Montrer que si $\vec{x}$ est solution, alors

$$\beta\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.$$

(iv) Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$, et que

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2\vec{v}.$$

En déduire que $\beta = -\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}$.

(v) Conclure que l'ensemble des solutions est

$$\left\{\alpha\vec{u} - \frac{1}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \wedge \vec{v}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Décrire cet ensemble.