Feuille d'exercices 19
Espaces vectoriels : dimension finie

Exercice 1 ●○○ — Compléter ou extraire

1. La famille de $\mathbb{R}^4$ formée de $e_1 = (1,0,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1,0)$ est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. La famille de polynômes $(X, 1-X, X^2+X^3)$ est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. La famille de $\mathbb{R}^4$ formée des vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la question **1**, ainsi que des vecteurs $e_4 = (2,1,2,2)$, $e_5 = (0,0,1,1)$ et $e_6 = (2,0,0,1)$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^4$? Si oui, en extraire une base.
4. La famille de $M_2(\mathbb{R})$ formée des matrices
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
est-elle génératrice dans $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, en extraire une base.

Exercice 2 ●○○ — Dimension et base

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants (on pourra vérifier que c'est un sous-espace vectoriel en cas de doute) :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.
2. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_5 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 + 2x_5 = 0\}$.
3. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ donné par $\{(\alpha + 2\beta, -\beta + \gamma, -\gamma + 3\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^3) = X^2 P(X^2)\}$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
6. L'ensemble des suites arithmétiques (réelles ou complexes). A-t-on un résultat similaire pour les suites géométriques ?

Exercice 3 ●○○ — Dimension et base, bis

1. Déterminer une base et la dimension du sous-espace F de $\mathbb{R}^5$ suivant :
$$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7),$$
avec :
$$e_1 = (1,1,2,1,1),\quad e_2 = (1,-1,1,3,-1),\quad e_3 = (2,3,3,7,6),\ e_4 = (1,2,2,1,4),$$
$$e_5 = (0,1,0,1,2),\quad e_6 = (1,3,2,4,4),\quad e_7 = (1,1,1,-1,3).$$
2. Comment traiter la question **4** de l'exercice **1** avec un procédé visuellement plus efficace, similaire à la question précédente.

Exercice 4 ●○○ — Famille des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ et en rappeler une base.
2. Justifier qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I_n, M, \dots, M^p)$ est liée. Donner une majoration de p.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(M) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 5 ●●○ — Trouver un supplémentaire

Trouver un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants (par « trouver » on entend : décrire, par des équations, ou par une base, et si possible donner la dimension) :

1. Tous les sous-espaces vectoriels des questions 2.1–2.5.
2. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$. Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, le sous-espace vectoriel
$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in [\![0\,,p]\!]\,, P^{(k)}(1) = 0\}$$
3. Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$$
4. Dans $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel
$$F = \{f \in E, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}.$$

Exercice 6 ●●○ — Trouver un supplémentaire Soit $E = M_3(\mathbb{R})$, et F le sous-ensemble de E suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a+b-c \\ 0 & 2a-b+c & 0 \\ a+b-c & 0 & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base et la dimension de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans E.
4. Reprendre l'exercice avec

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 & a-c \\ 0 & 2a-b-c & 0 \\ a-c & 0 & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice 7 ●●○ — Un sous-espace de fonctions On note

$$F = \{x \mapsto a\sin(x+\varphi) \mid (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, et en déduire sa dimension.

Exercice 8 ●●○ — Une autre vision des suites récurrentes linéaires Soit a et b dans $\mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. On notes E l'ensemble des suites à valeurs complexes qui vérifient

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

1. Trouver une suite (v_n) simple dans E.
2. On note F l'ensemble des suites de la forme $(u_n - v_n)$, où (u_n) est dans E. Montrer que F est une droite vectorielle que l'on précisera.
3. En déduire un description des suites dans E.
4. Adapter la méthode pour décrire les suites qui vérifient

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8.$$