Feuille d'exercices 1
Premiers outils mathématiques

1 Superposition de signaux

Exercice 1 ●○○ — Somme de deux sinusoïdes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
2. Quelles sont les solutions qui sont dans l'intervalle $[-4\pi, 3\pi]$?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Exercice 2 ●●○ — Différentes amplitudes

1. On considère les deux signaux
$$S_1(t) = 3\cos(4t + \frac{7\pi}{6}) \quad \text{et} \quad S_2(t) = -\sqrt{3}\sin(4t + \frac{7\pi}{6}).$$
Mettre leur somme S sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$, en précisant les valeurs de ω, A et φ.
2. On superpose les deux signaux
$$S_1(t) = a\cos(3t + \varphi) \quad \text{et} \quad S_2(t) = 2\sqrt{3}\sin(3t + \frac{2\pi}{3}),$$
où a et φ sont inconnus. On obtient le signal S, que l'on mesure. On trouve que S vaut
$$S(t) = 4\cos(3t + \frac{\pi}{3}).$$
Déterminer les valeurs possibles pour l'amplitude a et la phase φ du signal S_1.

2 Composées de fonctions

Exercice 3 ●○○ — Déterminer des composées

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants, en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition des fonctions données ainsi que des fonctions construites :

1. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $g(x) = \ln(x)$ (on étudiera au préalable la fonction f).

Exercice 4 ●○○ — Dériver des composées

Pour chacunes des fonctions h ci-dessous, donner le domaine de définition puis calculer leur dérivée. On pourra commencer par écrire h sous la forme $g \circ f$, en précisant les fonctions g et f :

1. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3}$. **2.** $h : x \mapsto 5e^{7-3x^2}$ **3.** $h : x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$.

3 Intégrations par parties

Exercice 5 ●●○ — Quelques intégrations par parties

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$.
3. A l'aide d'un double intégration par parties, déterminer $\int_0^1 \cos(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 ●●● — Intégrales des puissances du logarithme

Pour $n \geqslant 0$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant e - 1$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?
4. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

4 Approximations de fonctions

Exercice 7 ●○○ Des DLs rapides

Donner les développements limités au premier ordre en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$. **2.** $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. **3.** $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. **4.** $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 8 ●●○ Approcher des angles

1. a. Donner les développements limités au premier ordre en $\frac{\pi}{4}$ des fonctions cos et sin.
   b. En déduire des valeurs approchées de $\sin(44°)$ et $\cos(46°)$. Etes-vous satisfait par ce résultat ?
2. a. Donner le développement limité au premier ordre en 0 de la fonction sin.
   b. Démontrer par une étude de fonctions, que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

   En déduire une valeur approchée de $\sin(3°)$, en précisant la qualité de l'approximation.

5 Produit vectoriel

Exercice 9 ●○○ Normale à un plan

Soit le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 3y - 5z = 8$.

1. Déterminer trois points non alignés A, B et C du plan.
2. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que dire de ce vecteur ?
3. Montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{n} = (2, -3, -5)$.

Exercice 10 ●●○ Avec des paramètres

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(3, 2, -4)$ et $(4, y, z)$ dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixée.

1. Donner des conditions pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
2. Exhiber un vecteur $\vec{v}$ satisfaisant ces conditions, puis un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale.
3. Comment transformer cette base pour la rendre orthonormale ?

6 Equations différentielles

Exercice 11 ●●○ Premières équadiff

Résoudre les équations différentielles suivantes, assorties de leurs conditions initiales :

1. $$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2\sin x \\ y(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$$

Exercice 12 ●●○ Chute libre avec frottement

Un corps de masse m est laché sans vitesse initiale d'une hauteur $h > 0$ à l'instant $t = 0$. On note $z(t)$ sa hauteur selon l'axe vertical ascendant, et $v(t) = z'(t)$ sa vitesse à l'instant t.

L'objet chute verticalement, il est soumis à son poids, ainsi qu'à un frottement proportionnelle à sa vitesse, avec un coefficient de frottement $\alpha > 0$. Après projection de la loi de Newton selon l'axe (Oz), on obtient

$$mv' = -\alpha v - mg,$$

avec les conditions initiales

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad z(0) = h.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sur la vitesse v.
2. En déduire la position z comme fonction du temps.

Exercice 13 ●●○ Oscillateurs

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathbb{R}$ une constante. Résoudre les équations différentielles

$$y'' + \omega^2 y = f$$

   et

$$y'' - \omega^2 y = f.$$

2. On ajoute un terme sur la première équation :

$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = f, \quad \text{avec} \ \ \alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}].$$

   Résoudre cette équation. Selon le signe de α, ce terme est appelé terme d'amortissement ou terme d'amplification, voyez-vous pourquoi ?