Feuille d'exercices 1
Premiers outils mathématiques

1 Superposition de signaux

Exercice 1 ●○○ Somme de deux sinusoïdes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
2. Quelles sont les solutions qui sont dans l'intervalle $[-4\pi, 3\pi]$?
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Exercice 2 ●●○ Différentes amplitudes

1. On considère les deux signaux
$$S_1(t) = 3\cos(4t + \frac{7\pi}{6}) \quad \text{et} \quad S_2(t) = -\sqrt{3}\sin(4t + \frac{7\pi}{6}).$$
Mettre leur somme S sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$, en précisant les valeurs de ω, A et φ.

2. On superpose (c'est-à-dire qu'on ajoute) les deux signaux
$$S_1(t) = a\cos(3t + \varphi) \quad \text{et} \quad S_2(t) = 2\sqrt{3}\sin(3t + \frac{2\pi}{3}),$$
où a et φ sont inconnus. On obtient le signal S, que l'on mesure. On trouve que S vaut
$$S(t) = 4\cos(3t + \frac{\pi}{3}).$$
Déterminer les valeurs possibles pour l'amplitude a et la phase φ du signal S_1.

Correction :

1. On cherche $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = r\cos(x - \phi).$$
D'après le cours, r est donné par $r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12}$, tandis que ϕ vérifie
$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2}.$$
On déduit que $\phi \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$. On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{12}\cos(x + \frac{\pi}{6}).$$
En particulier, pour $t \in \mathbb{R}$, on évalue cette identité avec $x = 4t + \frac{7\pi}{6}$, et on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 3\cos(4t+\frac{7\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(4t+\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{12}\cos(4t+\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{12}\cos(4t+\frac{4\pi}{3}).$$
On déduit la forme voulue avec $A = \sqrt{12}$, $\omega = 4$ et $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

2. On ne peut pas appliquer le cours, car la somme $S_1 + S_2$ n'est pas de la forme $a\cos + b\sin$, puisque les arguments dans les fonctions trigonométriques sont différents. On peut néanmoins s'inspirer de la méthode du cours pour transformer $S_1 + S_2$. Le plus direct (mais calculatoire) est de développer S_1 et S_2 avec les formules d'addition, ce qui donne, pour $t \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} S_1(t) + S_2(t) &= a\cos\varphi\cos 3t - a\sin\varphi\sin 3t + 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}\cos 3t + 2\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}\sin 3t. \\ &= \big(a\cos\varphi + 3\big)\cos 3t + \big(-a\sin\varphi - \sqrt{3}\big)\sin 3t \end{aligned}$$
D'un autre côté, on développe également S :
$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= 4\cos\frac{\pi}{3}\cos 3t - 4\sin\frac{\pi}{3}\sin 3t \\ &= 2\cos 3t - 2\sqrt{3}\sin 3t. \end{aligned}$$
Ainsi, on a $S_1 + S_2 = S$ lorsque
$$\begin{cases} a\cos\varphi + 3 = 2 \\ -a\sin\varphi - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a\cos\varphi = -1 \\ a\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases}$$
Attention, à ce stade du raisonnement, ce système n'est pas une implication mais une condition suffisante, puisqu'on s'est contenté d'égaliser les facteurs devant $\cos 3t$ et $\sin 3t$! Puisque l'énoncé demande de trouver les valeurs possibles (sous-entendu :

toutes les valeurs possibles), il faut s'assurer que ces conditions sur (a, φ) sont aussi nécessaires. Pour cela, on évalue l'égalité $S_1 t) + S_2(t) = S(t)$ en $t = 0$ ce qui implique la première ligne du système, puis en $t = \frac{\pi}{6}$, de sorte que $3t = \frac{\pi}{2}$, ce qui implique la seconde.

Résolvons maintenant le système. Si a et φ sont solutions de ce système, alors on a

$$a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4,$$

ce qui équivaut à $a^2 = 4$, et donc $a = 2$ ou $a = -2$. Pour chacun de ces deux cas, on déduit φ :

- Lorsque $a = 2$, on a
$$\begin{cases} \cos \varphi = -\dfrac{1}{2} \\ \sin \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
et donc $\varphi \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.
- Lorsque $a = -2$, on obtient de même $\varphi \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Réciproquement, il est évident que ces valeurs de a et φ résolvent le système ci-dessus.

En conclusion :

$$\begin{aligned} & S_1 + S_2 = S \\ \iff & \begin{cases} a \cos \varphi = -1 \\ a \sin \varphi = \sqrt{3} \end{cases} \\ \iff & \left(a = 2 \text{ et } \varphi \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \right) \text{ ou } \left(a = -2 \text{ et } \varphi \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \right) \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter qu'en physique, on considère souvent des amplitudes positives, mais qu'une amplitude négative peut être considérée quitte à déphaser de π, ce qui correspond à la formule $\cos x = -\cos(x + \pi)$.

2 Composées de fonctions

Exercice 3 •○○ — Déterminer des composées

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants, en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition des fonctions données ainsi que des fonctions construites :

1. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = \ln(x)$ (on étudiera au préalable la fonction f).

Exercice 4 •○○ — Dériver des composées

Pour chacunes des fonctions h ci-dessous, donner le domaine de définition puis calculer leur dérivée. On pourra commencer par écrire h sous la forme $g \circ f$, en précisant les fonctions g et f :

1. $h : x \mapsto 5e^{7-3x^2}$
2. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3}$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$.

Correction :

1. Cette question est assez simple car il n'y a pas de problématique avec le domaine de définition. On introduit les fonctions f et g, toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$, par
$$f(x) = 7 - 3x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 5e^x.$$
On a alors $h = g \circ f$, qui est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = -6x \times 5e^{7-3x^2} = -30e^{7-3x^2}.$$
On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors
$$(e^u)' = u'e^u.$$
2. On pose $g(x) = \sqrt{x}$, défini sur $D_g = [0, +\infty[$. Trouvons les valeurs interdites pour définir $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3}$: il s'agit des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - 3 < 0$. Le polynôme $x \mapsto x^2 - 3$ est du signe du coefficient dominant (positif) sauf entre ses racines $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Ainsi, on pose $I =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$, et on a
$$\forall x \in I, \quad x^2 - 3 \geqslant 0.$$
On introduit $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 3$, et on peut alors écrire $h = g \circ f$. Afin de dériver h, on note que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0, +\infty[$. On doit donc modifier la solution précédente en définissant f sur un ensemble J tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$. Pour cela, on pose $J =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, et la fonction $g \circ f$ est bien définie et dérivable sur J, avec
$$\forall x \in J, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$
On voit dans la formule l'importance d'avoir $x^2 - 3 > 0$ et pas seulement $x^2 - 3 \geqslant 0$.
On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et à valeurs strictement positive, alors
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Remarque : La correction ci-dessus élude le vocabulaire ensembliste. On peut dans un premier temps raisonner sur la notion de “valeurs interdites”. Une correction plus poussée serait de dire que l'on veut définir f par $f(x) = x^2 - 3$, sur un domaine de définition I tel que $f(I) \subset D_g$ ce qui traduit $\forall x \in I,\ x^2 - 3 \geqslant 0$.

3. Introduisons la fonction $g = \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$.
Trouvons les valeurs interdites pour définir $x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$: il s'agit des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^3 + 1 = 0$. Or la fonction $x \mapsto x^3 + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule donc au plus une fois, et comme elle s'annule en -1, on a donc

$$x^3 + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Ainsi, si on pose $I = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, et qu'on introduit la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 1$, on a bien

$$\forall x \in I, \quad f(x) \neq 0,$$

ce qui permet de définir $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, qui vérifie bien

$$\forall x \in I, \quad g \circ f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} = h(x).$$

On déduit, puisque $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, que

$$\forall x \in I, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = 3x^2 \times (-\frac{1}{f(x)^2}) = -\frac{3x^2}{(x^3 + 1)^3}.$$

On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et à valeurs non nulle, alors

$$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}.$$

3 Intégrations par parties

Exercice 5 ●●○ Quelques intégrations par parties

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(2t)\,\mathrm{d}t$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$.
3. A l'aide d'un double intégration par parties, déterminer $\int_0^1 \cos(2t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. On pose $v(t) = t$ et $u'(t) = \sin(2t)$, de sorte que

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t) \quad \text{et} \quad u'(t) = \sin(2t) \\ v(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1 \end{cases}$$

On applique la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(2t)\,\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t \times (-\frac{1}{2}\cos(2t))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{4}\cos(\pi) + \frac{1}{2} \times 0 \times \cos(0) + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2}\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. On pose $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = x$, de sorte que $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.
On applique la formule d'intégration par parties pour les primitives

$$\begin{aligned} \int^x t \ln t\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

On rappelle que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, la notation $\int f$ désigne « une primitive de f » (sans variable) tandis que que la notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne « une primitive de f évaluée en un réel x ». La notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est légèrement ambigüe, car la variable x n'a pas le même rôle muet que dans une intégrale.

3. Notons I l'intégrale à calculer. Une première intégration par parties (que nous ne détaillons pas) fournit, en dérivant $t \mapsto \cos(2t)$ et en primitivant $t \mapsto e^{-t}$:

$$I = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^1 - \int_0^1 (-2\sin(2t))(-e^{-t})\,\mathrm{d}t.$$

On applique une deuxième intégration par partie à la nouvelle intégrale (en prenant soin de dériver $t \mapsto \sin(2t)$ et de primitiver $t \mapsto e^{-t}$, puisque l'autre choix reviendrait à revenir en arrière) :

$$\int_0^1 \sin(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 - \int_0^1 2\cos(2t)(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = [-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 + 2I.$$

En mettant bout à bout ces deux égalités, on obtient :

$$I = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^1 - 2\left([-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 + 2I\right)$$

$$\iff 5I = -\cos(2)e^{-1} + 1 + 2\sin(2)e^{-1}$$
$$\iff I = \frac{2}{5}\sin(2)e^{-1} - \frac{1}{5}\cos(2)e^{-1} + \frac{1}{5}$$

Il n'est pas possible de plus simplifier cette expression. Notez qu'on aboutit au même résultat en primitivant deux fois $t \mapsto \cos(2t)$ au départ, mais il est ici plus facile de dériver que de primitiver.

Exercice 6 ●●● — Intégrales des puissances du logarithme

Pour $n \geqslant 0$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant e - 1$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?
4. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

4 Approximations de fonctions

Exercice 7 ●○○ — Des DLs rapides

Donner les développements limités au premier ordre en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
4. $x \mapsto \ln(1+x)$.

Correction : Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, son DL à l'ordre 1 en 0 est donné, d'après le cours, par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x0} \epsilon(x) = 0.$$

On applique cette formule aux fonctions de l'exercice, qui sont bien toutes dérivables en 0 :

1. Ici on a $f(x) = e^x$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$e^x = 1 + x + x\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
2. Ici on a $f(x) = \frac{1}{1-x}$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
3. Ici on a $f(x) = \frac{1}{1+x}$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$. On a donc
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
4. Ici on a $f(x) = \ln(1+x)$, donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$\ln(1+x) = x + x\epsilon(x), \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Exercice 8 ●●○ — Approcher des angles

1. a. Donner les développements limités au premier ordre en $\frac{\pi}{4}$ des fonctions cos et sin.
   b. En déduire des valeurs approchées de $\sin(44°)$ et $\cos(46°)$. Etes-vous satisfait par ce résultat ?
2. a. Donner le développement limité au premier ordre en 0 de la fonction sin.
   b. Démontrer par une étude de fonctions, que

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

   En déduire une valeur approchée de $\sin(3°)$, en précisant la qualité de l'approximation.

5 Produit vectoriel

Exercice 9 ●○○ Normale à un plan

Soit le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 3y - 5z = 8$.

1. Déterminer trois points non alignés A, B et C du plan.
2. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que dire de ce vecteur ?
3. Montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{n} = (2, -3, -5)$.

Exercice 10 ●●○ Avec des paramètres

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(3, 2, -4)$ et $(4, y, z)$ dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixée.

1. Donner des conditions pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
2. Exhiber un vecteur $\vec{v}$ satisfaisant ces conditions, puis un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale.
3. Comment transformer cette base pour la rendre orthonormale ?

Equations différentielles

Exercice 11 ●●○ Premières équadiff

Résoudre les équations différentielles suivantes, assorties de leurs conditions initiales :

1.

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2\sin x \\ y(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$$

Correction :

1. Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 avec second membre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = x^2. \tag{1}$$

La stratégie est donnée par le cours :

- On résout l'équation homogène associée.
- On donne une solution particulière de (1).
- On conclut avec le théorème de superposition.

On commence par résoudre l'équation différentielle homogèe associée :

$$y' + 2y = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre (1). La forme du second membre suggère de chercher un polynôme du second degré. Soient α, β et γ trois réels, et soit $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ le polynôme associé. On a

$$P'(x) + 2P(x) = 2\alpha x + \beta + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma.$$

Ainsi, puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) + 2P(x) = x^2 \iff \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y_p(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2})$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

On conclut avec le théorème de superposition : toute solution y de l'équation différentielle avec second membre est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-2x} + y_p(x).$$

La condition $y(0) = 1$ devient alors

$$\lambda + y_p(0) = 1,$$

ce qui équivaut, puisque $y_p(0) = \frac{1}{4}$, à $\lambda = \frac{3}{4}$.
On conclut : l'équation différentielle assortie de sa condition initiale a une unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right).$$

2. La stratégie est la même qu'à la question précédente, la différence étant ddans la recherche d'une solution particulière.
On commence par résoudre l'équation différentielle homogèe associée :

$$y' + y = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y'(x) + y(x) = 2\sin x.$$

La forme du second membre suggère de chercher une somme de fonctions trigonométriques. Soient α et β deux réels, et soit $f(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ la fonction candidate. On a

$$f'(x)+f(x) = (\alpha\cos x-\beta\sin x)+(\alpha\sin x+\beta\cos x) = (\alpha-\beta)\sin x+(\alpha+\beta)\cos x.$$

Ainsi, une condition suffisante pour que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = 2\sin x$$

est que

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y_p(x) = \sin x - \cos x$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. On pourrait démontrer que les conditions ci-dessus sont en fait nécessaires, et que c'est la seule solution particulière sous forme $\alpha\sin + \beta\cos$, mais ce n'est pas utile pour terminer l'exercice, pusqu'il suffit d'avoir une solution particulière pour avancer.
On conclut avec le théorème de superposition : toute solution y de l'équation différentielle avec second membre est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-x} + y_p(x).$$

La condition $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ devient alors

$$\lambda e^{-\frac{\pi}{4}} + y_p(\frac{\pi}{4}) = -1,$$

ce qui équivaut, puisque $y_p(\frac{\pi}{4}) = 0$, à $\lambda = -e^{\frac{\pi}{4}}$.
On conclut : l'équation différentielle assortie de sa condition initiale a une unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = -e^{\frac{\pi}{4}}e^{-x} + \sin x - \cos x.$$

Exercice 12 ●●○ — Chute libre avec frottement

Un corps de masse m est laché sans vitesse initiale d'une hauteur $h > 0$ à l'instant $t = 0$. On note $z(t)$ sa hauteur selon l'axe vertical ascendant, et $v(t) = z'(t)$ sa vitesse à l'instant t.

L'objet chute verticalement, il est soumis à son poids, ainsi qu'à un frottement proportionnelle à sa vitesse, avec un coefficient de frottement $\alpha > 0$. Après projection de la loi de Newton selon l'axe (Oz), on obtient

$$mv' = -\alpha v - mg,$$

avec les conditions initiales

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad z(0) = h.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sur la vitesse v.

2. En déduire la position z comme fonction du temps.

Correction :

1. On met l'équation sous la forme du cours, appelée forme normalisée :

$$v' + \frac{\alpha}{m}v = -g. \tag{2}$$

L'équation homogène associée à (2) est

$$v' + \frac{\alpha}{m}v = 0,$$

ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

On cherche maintenant une solution particulière de (2). Puisque le second membre est constant, on cherche cette solution particulière sous la forme d'une constante. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v_c(t) = -\frac{mg}{\alpha}$$

convient.

D'après le théorème de superposition, une fonction v est solutions de (2) si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}.$$

La conditon initiale $v(0) = 0$ est alors équivalente à $\lambda = \frac{mg}{\alpha}$, et donc la vitesse est donnée par

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1).$$

On vérifie bien que la vitesse est négative, ce qui est cohérent puis l'axe est ascendant, et donc l'objet descend, et que cette vitesse est décroissante, donc qu'elle augmente en valeur absolue, et donc l'objet accélère. On peut noter que

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_c,$$

c'est-à-dire que la vitesse tend vers la vitesse constante pour laquelle le frottement est exactement compensée par le poids.

2. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = v(t) = \frac{mg}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1).$$

Afin de trouver z, on primitive la fonction ci-dessus : on obtient que la fonction z est de la forme

$$z(t) = -\frac{m^2 g}{\alpha^2} e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}t + C.$$

La condition $z(0) = h$ va permettre de déterminer C : en effet, on trouve

$$z(0) = -\frac{m^2 g}{\alpha^2} + C$$

et donc

$$C = h + \frac{m^2 g}{\alpha^2}.$$

Au final, on obtient

$$z(t) = \frac{m^2 g}{\alpha^2}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) - \frac{mg}{\alpha}t + h.$$

Remarque : On peut noter que la quantité $\frac{m}{\alpha}$ est homogène à un temps, il est standard de l'appeler τ. On a alors la formule plus synthétique

$$z(t) = g\tau^2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t + h.$$

Pour aller plus loin : La quantité τ est appelée *temps caractéristique* : sa valeur permet de savoir quand la quantité (sans unité) $e^{-\frac{t}{\tau}}$ est négligeable devant 1 (et ce dans n'importe que problème faisant intervenir une telle quantité), par exemple lorsque $t = \tau$, on a $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0.63$ tandis que lorsque $t = 3\tau$, on a $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0.95$. Ici cela a peu d'importance car le terme $g\tau^2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est *rapidement* dominé par le terme $-g\tau t$.

Sur un autre plan, on peut se demander ce qu'il se passe lorsque $\alpha \to 0$, c'est-à-dire lorsque le coefficient de frottement tend vers 0. On constate que les solutions trouvées pour z et v n'ont pas de limite, et qu'on ne retrouve naïvement pas la solution de l'équation différentielle sans frottement $z'' = -g$, dont la solution est $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$ (toujours avec une vitesse initiale nulle).

Exercice 13 ●●○ Oscillateurs

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathbb{R}$ une constante. Résoudre les équations différentielles

$$y'' + \omega^2 y = f$$

et

$$y'' - \omega^2 y = f.$$

2. On ajoute un terme sur la première équation :

$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = f, \qquad \text{avec} \quad \alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}].$$

Résoudre cette équation. Selon le signe de α, ce terme est appelé terme d'amortissement ou terme d'amplification, voyez-vous pourquoi ?