

Feuille d'exercices 20

Intégration

— **Exercice 1** ●○○ — **Vrai ou faux ?** Dire (en justifiant) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (les fonctions sont supposées continues).

1. L'intégrale d'une fonction impaire est nulle.
2. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
3. Si $f > 0$ sur $[0, 1[$ et $f < 0$ sur $]1, 100]$, alors $\int_0^{100} f < 0$.
4. L'intégrale d'une fonction minorée par 1 est minorée par 1.
5. L'intégrale d'une fonction qui ne s'annule qu'au deux extrémités de l'intervalle d'intégration n'est pas nulle.
6. Si pour tout $x \in [-3, 3]$, on a $f(x) \leq x^3$, alors $\int_{-3}^3 f \leq 0$.
7. Il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.
8. Il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $\int_{-1}^1 f = f(c)$.

— **Exercice 2** ●●○ — **LE classique : intégrales de Wallis** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, positive et décroissante.
4. En déduire que la suite (I_n) converge.
5. Montrer par une intégration par parties que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression explicite de I_{2p} et I_{2p+1} .
7. Déduire également que

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

8. En déduire que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$.
9. Montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

10. Montrer que

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Instant culture : Ces intégrales peuvent servir à montrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

formule étonnante car elle relie les nombres e, π , et la suite (entière) des factorielles.

— **Exercice 3** ●●○ — **Changements de variable, le retour** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$ (commencez par chercher une forme canonique).
2. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx$.
3. $\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x(25+\ln^2(3x))} dx$ (la présence de $\frac{1}{x} dx$ fait penser à ...).

— **Exercice 4** ●●○ — **Sommes de Riemann** Calculer les limites des quantités suivantes lorsque $n \rightarrow +\infty$:

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$.
3. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (Appliquer une fonction bien choisie).

— **Exercice 5** ●●○ — **Formule de la moyenne** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et $g \in \mathcal{C}^0([a, b])$, avec g de signe constant.

1. Montrer le résultat suivant :

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Idée : Chercher à montrer que la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx - f(t) \int_a^b g(x) dx$ s'annule.

2. Etudier la limite de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.
3. Etudier la limite de $n^2 \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t} dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

— **Exercice 6** ●● — **Lemme de Riemann : un résultat important en série de Fourier** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Montrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = 0.$$

Instant culture : Ce résultat reste vrai pour une fonction continue (et même continue « par morceaux »), mais la preuve est moins directe. On vient en fait de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction tendent vers 0.

— **Exercice 7** ●● — **Bornes variables** Soit f a fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)} dt$$

1. Montrer que f est impaire sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .
3. Etudier les variations de $t \mapsto \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}$ et montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
4. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x$.

— **Exercice 8** ●● — **Méthode des trapèzes** On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. On considère une subdivision régulière $(x_j)_{j=0, \dots, n}$ de $[a, b]$, et on pose

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}.$$

On va montrer que T_n est bonne approximation de $\int_a^b f$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. (Approximation par une fonction affine).
 - a. Soient $\alpha < \beta$ quelconques, et g la fonction affine définie sur $[\alpha, \beta]$, qui relie les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. Donnez son expression et calculez $\int_\alpha^\beta g$. Faites un dessin.
 - b. Montrer par une double intégration par parties que

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta) f(x) dx.$$

- c. Calculer $\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x) dx$ (on pourra poser $x = \alpha + (\beta - \alpha)u$ pour simplifier le calcul).

d. En déduire que

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) - g(x) dx \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f''(t)|.$$

2. Etant donné le graphe de f , représenter les quantités $\int_a^b f(t) dt$ et T_n . Justifier le nom de la méthode.
3. Montrer que

$$\left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \text{ avec } M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

— **Exercice 9** ●● — **Aire d'une ellipse** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit \mathcal{E} le sous-ensemble du plan défini par

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

1. Représenter schématiquement l'ensemble \mathcal{E} . On pourra commencer par le dessiner à l'aide du changement d'échelle $(X, Y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$.
2. Calculer l'aire délimitée par \mathcal{E} dans le quart de plan supérieur droit $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On pourra exprimer y en fonction de x dans $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, ou utiliser une intégrale double et des coordonnées polaires, comme en SI.
3. En déduire l'aire totale délimitée par \mathcal{E} . Est-ce cohérent avec le cas $a = b = 1$. Auriez-vous pu trouver le résultat « à la main » par des changement d'échelle ?

— **Exercice 10** ●● — **Inégalité par une formule de Taylor** Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$