Feuille d'exercices 20 Intégration

Exercice 1 ●○○ **Vrai ou faux ?** Dire (en justifiant) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (les fonctions sont supposées continues).

1. L'intégrale d'une fonction impaire est nulle.
2. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
3. Si $f > 0$ sur $[0,1[$ et $f < 0$ sur $]1,100]$, alors $\int_0^{100} f < 0$.
4. L'intégrale d'une fonction minorée par 1 est minorée par 1.
5. L'intégrale d'une fonction qui ne s'annulent qu'au deux extrémités de l'intervale d'intégration n'est pas nulle.
6. Si pour tout $x \in [-3,3]$, on a $f(x) \leqslant x^3$, alors $\int_{-3}^{3} f \leqslant 0$.
7. Il existe $c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.
8. Il existe $c \in [-1,1]$ tel que $\int_{-1}^1 f = f(c)$.

Exercice 2 ●●○ **LE classique : intégrales de Wallis** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, positive et décroissante.
4. En déduire que la suite (I_n) converge.
5. Montrer par une intégration par parties que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression explicite de I_{2p} et I_{2p+1}.
7. Déduire également que
$$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$
8. En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
9. Montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
10. Montrer que
$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Instant culture : Ces intégrales peuvent servir à montrer la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$
formule étonante car elle relie les nombres e, π, et la suite (entière) des factorielles.

Correction :

1. On a
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$
2. Comment transformer un sinus en cosinus ? On effectue dans I_n le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ (et donc $u = \frac{\pi}{2} - t$) :
$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin(\frac{\pi}{2} - u))^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \,\mathrm{d}u.$$
3. On a
$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leqslant \sin t \leqslant 1$$
et donc en intégrant cette inégalité
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2},$$
ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et bornée.
Montrer la décroissance de la suite : soient $m \leqslant n$ deux entiers, on rappelle que si $x \in [0,1]$, on a alors $x^n \leqslant x^m$. Ainsi on a
$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (\sin t)^n \leqslant (\sin t)^m.$$
En intégrant cette inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient
$$I_n \leqslant I_m.$$
On a montré que
$$m \leqslant n \implies I_n \leqslant I_m,$$
cela prouve que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

4. La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
5. On a

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \times (\sin t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$$
$$= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Le deuxième terme se calcule par intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(\sin t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t}_{u} \times \underbrace{(\cos t \sin^n t)}_{v'}\,\mathrm{d}t$$
$$= [\cos t \times \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

A finir...

Exercice 3 ●●○ — Changements de variable, le retour Calculer les intégrles suivantes :

1. $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x$ (commencez par chercher une forme canonique).
2. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.
3. $\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x(25+\ln^2(3x))}\,\mathrm{d}x$ (la présence de $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ fait penser à ...).

<u>**Correction**</u> :

1. Classique
2. Effectuons le changement de variable $u = \ln x$, dont la réciproque s'écrit $x = e^u$. On a alors
$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \mathrm{d}x = e^u\,\mathrm{d}u.$$
On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :
$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin u \times e^u\,\mathrm{d}u.$$
On cherche une primitive de $\sin u \times e^u$: pour un produit "trigo-expo", on peut par exemple passer en complexe :
$$\sin u \times e^u = \mathrm{Im}(e^{iu})e^u = \mathrm{Im}(e^{iu}e^u) = \mathrm{Im}(e^{iu+u}) = \mathrm{Im}(e^{u(1+i)}).$$
Or
$$\int^x e^{u(1+i))}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} = \frac{1-i}{2}e^{ix}e^i$$
$$= \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x + i\sin x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x + i(-\cos x + \sin x)),$$
puis
$$\int^x \sin u \times e^u\,\mathrm{d}u = \int^x \mathrm{Im}(e^{iu}) \times e^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{Im}(\int^x e^{iu} \times e^u\,\mathrm{d}u) = (\cos x + \sin x)e^x.$$
On peut conclure :
$$\int_0^\pi \sin u \times e^u\,\mathrm{d}u = [(\cos u + \sin u)e^u]_0^\pi = e^\pi - 1$$
3. Effectuons le changement de variable $u = \ln(3x)$. On a $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :
$$\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x\left(25+\ln^2(3x)\right)}\,\mathrm{d}x = \int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25+u^2}\,\mathrm{d}u.$$
On rappelle (ou on redémontre en posant $u = at$) la formule
$$\int^y \frac{1}{u^2+a^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}(\frac{y}{a}),$$
qui donne avec $a = 5$:
$$\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}[\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{5}]_5^{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5}(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3} - \mathrm{Arctan}\,1) = \frac{1}{5}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{60}.$$

Exercice 4 ●●○ — Sommes de Riemann Calculer les limites des quantités suivantes lorsque $n \to +\infty$:

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$. 2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$. 3. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (Appliquer une fonction bien choisie).

<u>**Correction**</u> :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$.

3. Notons (p_n) la suite à étudier. Un quotient et des factorielles dans un exercice de sommes de Riemann ? Appliquons la fonction ln à la suite :

$$\ln(p_n) = \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(\ln(2n!) - \ln(n^n) - \ln(n!)).$$

Comment faire apparaître une somme ? On a

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

et donc

$$\ln((2n)!) - \ln(n!) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k).$$

En utilisant aussi $\ln(n^n) = n\ln n$, on obtient

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n\ln n).$$

Pour faire rentrer $n\ln$ dans la somme, on note que cette somme comporte n termes, et donc

$$n\ln n = \sum_{k=n+1}^{2n} n,$$

donc

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n}.$$

On pourrait faire apparaître deux somme de Riemann (de 1 à n et de 1 à $2n$) mais il est plus direct d'utiliser le glissement d'indice $k = n+p$:

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\frac{n+p}{n} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln(1+\frac{p}{n}).$$

On pose $f(x) = \ln(1+x)$, et on reconnait une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0,1]$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(p_n) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Puisque $p_n = \exp(\ln(p_n))$ par continuité de la fonction exponenielle :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

Exercice 5 ••○ — Formule de la moyenne Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et $g \in \mathscr{C}^0([a,b])$, avec g de signe constant.

1. Montrer le résultat suivant :

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

<u>**Idée**</u> : Chercher à montrer que la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(t)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'annule.

2. Etudier la limite de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to 0^+$.
3. Etudier la limite de $n^2\int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 ••○ — Lemme de Riemann : un résultat important en série de Fourier Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Montrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

<u>**Instant culture**</u> : Ce résultat reste vrai pour une fonction continue (et même continue « par morceaux »), mais la preuve est moins directe. On vient en fait de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction tendent vers 0.

Exercice 7 ••○ — Bornes variables Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Etudier les variations de $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}$ et montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.

Exercice 8 ••• — Méthode des trapèzes On suppose que $f \in \mathscr{C}^2([a,b])$. On considère une subdivision régulière $(x_j)_{j=0,\ldots,n}$ de $[a,b]$, et on pose

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}.$$

On va montrer que T_n est bonne approximation de $\int_a^b f$ lorsque $n \to +\infty$.

1. (Approximation par une fonction affine).
   a. Soient $\alpha < \beta$ quelconques, et g la fonction affine définie sur $[\alpha, \beta]$, qui relie les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. Donnez son expression et calculez $\int_\alpha^\beta g$. Faites un dessin.
   b. Montrer par une double intégration par parties que
   $$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   c. Calculer $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra poser $x = \alpha + (\beta-\alpha)u$ pour simplifier le calcul).
   d. En déduire que
   $$\left|\int_\alpha^\beta f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f''(t)|.$$
2. Etant donné le graphe de f, représenter les quantités $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et T_n. Justifier le nom de la méthode.
3. Montrer que
   $$\left|T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{avec} \quad M_2 = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

Exercice 9 ●●○ — Aire d'une ellipse Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit $\mathcal{E}$ le sous-enemble du plan défini par
$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

1. Représenter schématiquement l'ensemble $\mathcal{E}$. On pourra commencer par le dessiner à l'aide du changement d'échelle $(X,Y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$.
2. Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{E}$ dans le quart de plan supérieur droit $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On pourra exprimer y en fonction de x dans $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, ou utiliser une intégrale double et des coordonnées polaires, comme en SI.
3. En déduire l'aire totale délimitée par $\mathcal{E}$. Est-ce cohérent avec le cas $a = b = 1$. Auriez-vous pu trouver le résultat « à la main » par des changement d'échelle ?

Exercice 10 ●●○ — Inégalité par une formule de Taylor Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$