Feuille d'exercices 21
Applications linéaires

Exercice 1 ●○○ **Noyau et image d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$** Soit la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$. Que dire de u ?

Faire de même avec la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z).$$

Exercice 2 ●○○ **Applications linéaires, noyaux et rangs**

1. Les applications suivantes, toutes notées u, sont-elles linéaires ?
   - **a.** La fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $(x, y, z) \mapsto (y - z, z, yz, x)$.
   - **b.** La fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par
     $$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1+2x_2+x_3, -4x_1+x_3+x_4, -x_1-2x_2+x_4, 8x_2+x_3-3x_4).$$
   - **c.** La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ définie par $P \mapsto P(X^2)$.
   - **d.** La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ définie par $P \mapsto X^2P' - 2XP$.
   - **e.** La fonction de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto AM - MA$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de A ont-ils joué ?
2. Pour les applications linéaires précédentes, déterminer une base de $\ker(u)$, la dimension de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice 3 ●○○ **Applications linéaires définies par trois images**

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que
   $$u(0, 1, 1) = (0, 1), \quad u(1, 1, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad u(0, 1, 0) = (1, 0).$$
2. Déterminer l'image par u d'un vecteur (x, y, z).
3. Déterminer $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$.

Correction :

1. Il suffit de vérifier que les trois vecteurs $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$, dont on connait les images, forment une base de $\mathbb{R}^3$. On peut montrer manuellement qu'ils forment une famille libre, mais on peut aussi calculer leur produit mixte :
   $$[f_1, f_2, f_3] = (f_1 \wedge f_2) \cdot f_3 = 1 \neq 0,$$
   ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Une application linéaire étant définie de manière unique par ses images sur une base, cela répond à la question.
2. On va chercher à exprimer le vecteur (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}'$. Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base canonique $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a
   $$e_1 = f_2 - f_1, \quad e_2 = f_3 \quad \text{et } e_3 = f_1 - f_3.$$
   Ainsi, on a
   $$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (-x + z)f_1 + xf_2 + (y - z)f_3.$$
   On peut maintenant calculer, en utilisant la linéarité de f et les données des $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$:
   $$\begin{aligned} u(x, y, z) &= (-x + z)u(f_1) + xu(f_2) + (y - z)u(f_3) = (0, -x + z) + (x, x) + (y - z, 0) \\ &= (x + y - z, z) \end{aligned}$$
   Remarque : On pouvait aussi utiliser le calcul matriciel. On introduit pour cela la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui consiste à écrire les vecteurs (f_i) en colonne (puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique) :
   $$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   On a en fait calculé son inverse lorsque l'on exprimé $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{B}'$:
   $$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application linéaire est définie par les $u(f_i)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On applique alors la formule de changement de base pour connaître la matrice de u dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = B = Q^{-1}AP,$$

avec $Q = I_3$ (on ne change pas la base d'arrivée) et $P = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ qui a été calculée. On obtient en faisant le produit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien que $u(x, y, z) = (x + y - z, z)$.
Cette méthode semble plus longue, parceque vous débutez. En fait on pourrait faire un même changement de base pour plusieurs applications linéaires données dans $\mathcal{B}'$ (il suffit de calculer P), de plus elle ramène tout au simple calcul matriciel.

3. Standard

Exercice 4 ●○○ — Application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$u(e_1) = f_1 - f_3,\ \ u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3,\ u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \text{ et } \ u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

2. Déterminer l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2, x_3, x_4) (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser !).

3. Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application est-elle injective ?

4. En déduire $\mathrm{Im}(u)$. L'application est-elle surjective ?

Exercice 5 ●●○ — Sommes directes (ou pas)

1. Soit u la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

A-t-on $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \bigoplus \mathrm{Im}(u)$?

2. Soit v la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(v) \bigoplus \mathrm{Im}(v)$?

Exercice 6 ●●○ — Fonctions somme des coordonnées Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit u la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ?

2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et en déduire $\mathrm{rg}(u)$.

Exercice 7 ●●○ — Image et noyau de la composée Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

3. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

Exercice 8 ●●○ — Composée nulle Soit E un espace vectoriel de dimension n, ainsi que u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \subset \ker v$.

2. Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.

Exercice 9 ●●○ — Endomorphisme nilpotent Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$, et que n est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, on a $u^k \neq 0$.

1. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'un tel endomorphisme pour $n = 2$.

2. On revient au cas général. Montrer que $\mathrm{Id} - u$ est bijective, et donner son inverse.

Correction :

1. On peut prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, cette matrice vérifie $N^2 = N$. L'endomorphisme associé est définie par

$$u((x, y)) = (y, 0).$$

2. On peut s'inspirer de la formule, pour un réel $x \neq 1$:
$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$
Ainsi, on pose
$$v = \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \mathrm{Id} + u + \ldots + u^{n-1}.$$
On a alors, par telescopage :
$$v \circ (\mathrm{Id} - u) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - \sum_{k=1}^{n} u^k = \mathrm{Id} - u^n.$$
Or par hypothèse, $u^n = 0$, cela prouve que
$$v \circ (\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Id}.$$
Comme $\mathrm{Id} - u$ est un endomorphisme en dimension finie, cela prouve que $\mathrm{Id} - u$ est bijective, de fonction réciproque v.

Remarque : L'argument concernant la dimension finie utilise un théorème de cours subtil, à savoir qu'il suffit d'avoir une réciproque "à droite" ou "à gauche" pour être bijective. Si cet argument vous effraie, vous pouvez simplement dire qu'on a par un calcul analogue $(\mathrm{Id} - u) \circ v = \mathrm{Id}$.

Exercice 10 ●●○ — Endomorphisme de polynômes Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par
$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$. Précisez la dimension de ces sous-espace vectoriels.

Exercice 11 ●●○ — Evaluation en deux points Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$. La fonction fonction u est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. (Plus dur). On revient au cas $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Décrire $\ker(u)$.

Exercice 12 ●●○ — Endomorphisme avec la transposée Soit $u : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ définie par
$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle nom et notation a-t-on donné pour $\ker(u)$ dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de $\ker(u)$, en donner une base. Faire de même pour $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 13 ●●● — Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle Soit $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par
$$u : f \mapsto f'' + f' - 2f.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker u$ et sa dimension.
3. La fonction $x \mapsto \sin x$ appartient-elle à $\mathrm{Im}\, u$?
4. Déterminer $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.