# Feuille d'exercices 22
# Matrices et applicatons linéaires

**Exercice 1** ●○○ **Applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$** Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x + y)$.
2. La fonction $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : (x, y, z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+y+2z)$.
3. La fonction $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $v : (x, y, z) \mapsto (y + 2z, z, x + y)$.
4. Les fonctions $2u - 3v$ et $f \circ v$. Et $v \circ f$ ? (il y a un piège).

**Exercice 2** ●○○ **Changement de bases dans $\mathbb{R}^3$** Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Un élément de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $(x'_1, x'_2, x'_3)$ dans $\mathcal{B}'$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ ? Et sa matrice dans $\mathcal{B}$ ?
3. Un élément de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathcal{B}$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ ? Et sa matrice dans $\mathcal{B}'$ ?
4. Soit la fonction $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : (x, y, z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+y+2z)$. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}'$ (on utilisera une matrice de passage).

**Exercice 3** ●○○ **Applications linéaires chez les polynômes** Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ définie par $f : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 6XP$.
2. La fonction $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $u : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.

**Exercice 4** ●○○ **Matrices dans différentes bases de polynômes** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f : P \mapsto (X+1)P' - P'(1)X^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que les familles

$$\mathcal{B}' = (1, 1 + X, X + X^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'' = (1 + X + X^2, 1 + X, 1 + X^2).$$

1. Vérifier que $f$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ forment deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage).
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage).
5. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage).

**Exercice 5** ●●○ **Changement de bases** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension 2 et 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $E$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de $F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soient enfin

$$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}' = (f_1 + f_3, f_2 + f_3, f_3).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ sont des bases respectives de $E$ et $F$.
2. Soit $x \in E$, de coordonnées $(x'_1, x'_2)$ dans $\mathcal{B}'$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
3. Soit $x \in E$, de coordonnées $(x_1, x_2)$ dans $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

**Exercice 6** ●●○ **Système de suites, puissances et matrice diagonale** On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -2x_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 2y_n + z_n \end{cases}$$

1. Ecrire le problème sous forme matricielle à l'aide d'une matrice $A$.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que ces vecteurs forment une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer $Ae_i$ pour chacuns des $(e_i)_{i=1,2,3}$, et déterminer $P^{-1}AP$, où $P$ est la matrice dont les colonnes sont les $(e_i)_{i=1,2,3}$. On évitera d'effectuer le produit matriciel.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire $A^n$, puis une expression de $X_n$ en fonction de $(x_0, y_0, z_0)$.
4. En déduire les termes généraux des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$, et leurs comportements asymptotiques lorsque $n \to +\infty$ (c'est-à-dire des équivalents simples).

**Exercice 7 ••○ — Encore des polynômes** Soit la fonction, $u$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $u : P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Vérifier que $u$ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Sans utiliser de matrices, déterminer $\ker(u)$. Que déduire pour $u$ ?
3. Vérifier en utilisant la matrice de $u$ dans la base canonique ce que vous avez trouvé pour $\ker(u)$ et $\operatorname{Im} u$.

**Exercice 8 ••○ — Noyau et image d'une matrice** Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -13 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler ce que cela signifie en explicitant $u$.
2. Déterminer le rang de $u$, ainsi que $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$

**Exercice 9 ••• — Une matrice nilpotente** Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$ telle que

$$A^2 \neq 0 \text{ et } A^3 = 0.$$

Soit $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

1. Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{C}^4$ tel que $u^2(x) \neq 0$.
2. Montrer que $(u^2(x), u(x), x)$ est libre (classique).
3. Soit un vecteur $a \in \mathbb{R}^4$ tel que la famille $(u^2(x), u(x), x, a)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Justifier l'existence de $a$, et déterminer la matrice de $u$ dans cette base.
4. En déduire le rang de $u$.

**Exercice 10 ••• — Un endomorphisme nilpotent** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\dim(\ker(f)) = 2$ (on notera que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$).
2. En déduire qu'il existe alors une base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on pourra analyse la matrice pour construire la base).
3. Résoudre l'équation $A^2 = 0$ d'inconnue $A \in M_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 11 ••• —** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et une base de $\ker((f-\mathrm{Id})^2)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'il existe, et expliciter, une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On fera en sorte que les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ soient dans $\{-1, 0, 1\}$.
4. Déterminer la matrice de passage $P$ depuis la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathcal{B}'$, ainsi que $P^{-1}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $T^n$ puis $A^n$.

**Exercice 12 ••○ — Un espace vectoriel de fonctions** Introduisons les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = x\cos x, \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin x.$$

Soit $E$ le sous-espace vectoriel des fonctions réelles définies par $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Soit $u$ la fonction définie sur $E$ par $u : f \mapsto f'$.

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $E$ et en déduire sa dimension.
2. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$, et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
3. Cette application est-elle un isomorphisme ?
4. Soit $f \in E$, dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2, -3, 4, 6)$. Calculer $u(f)$.
5. On cherche $g \in E$ telle que les coordonnées de $u(g)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 5, 8)$. Résoudre ce problème. Comment aurait-on fait sans l'aspect matriciel ?