Feuille d'exercices 23
Séries numériques

Exercice 1 ●○○ — Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-1}{n^2+10^9}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **4.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2-n\cos n}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(1+e^{-n}\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 ●○○ — Donner la nature des séries suivantes, et lorsqu'elles convergent, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{3^{n+2}}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{2^n}$

Exercice 3 ●●○ — **Encadrement d'une somme** On considère pour $n\geqslant 2$ la somme partielle

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}.$$

1. Encadrer S_n à l'aide d'une intégrale de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t\ln t}$.
2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k\ln k}$ diverge, ainsi que l'équivalent des sommes partielles
$$S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\ln(n)).$$

Exercice 4 ●●○ — **Somme des factorielles** On considère la somme partielle $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$

1. Montrer que $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n!$ (on pourra majorer les termes de $\frac{S_{n-1}}{n!}$).
2. En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{S_n}{(n+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{S_n}{(n+2)!}$.

Exercice 5 ●●○ — **Séries convergentes modifiées** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum u_n^2$ **2.** $\sum\frac{u_n}{1+u_n}$ **3.** $\sum\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ (comment majorer ab par a^2 et b^2 ?)

Exercice 6 ●●○ — **Règle de d'Alembert** On présente ici un outil de deuxième année. Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs, de sorte que l'on puisse former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell<1$

1. On suppose que $\ell<1$.
   a. Soit $k\in]\ell,1[$. Montrer que
   $$\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N\quad u_{n+1}\leqslant ku_n.$$
   b. On déduire que la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $\ell>1$, ou bien que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1^+$. Montrer que
   $$\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N\quad u_{n+1}\geqslant u_n.$$
   Conclure.
3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Montrer qu'on ne peut pas conclure en donnant deux exemples de telles suite, telles que les séries associées converge et diverge.

Exercice 7 ●●○ — **Vers la formule de Stirling** On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{n^ne^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.

1. Montrer que $\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{12n^2}$ et en déduire la nature de la série.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel strictement positive, que l'on notera $\frac{1}{C}$.
4. En déduire que $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}Cn^ne^{-n}\sqrt{n}$.

Remarque : On peut montrer que $C=\sqrt{2\pi}$, en utilisant les intégrales de Wallis vues au TD « intégration ».

Exercice 8 ●●○ — Série harmonique et constante d'Euler Soit la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer en utilisant des intégrales que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.
2. Soit la série harmonique « corrigée » $u_n = H_n - \ln n$. Former $u_{n+1} - u_n$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.
3. En déduire le développement asymptotique
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$
4. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{1+\ldots+n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{n}$.