Feuille d'exercices 26
Probabilité 1 : Espaces probabilisés

Exercice 1 ●○○ **Ecriture ensembliste d'évènements** Les étudiants de PTSI se partagent en deux groupes, ceux qui préfèrent les maths et ceux qui préfèrent le couple « SI, Physiques ». On choisit au hasard trois étudiants de PTSI. On note M_k l'événement « le k-ième étudiant préfère les maths » pour $k \in [\![1\,,3]\!]$. Exprimer de manière ensembliste les événements suivants :

1. L'événement A : « les trois étudiants préfèrent les maths ».
2. L'événement B : « les trois étudiants ont la même préférence ».
3. L'événement C : « un étudiant exactement préfère les maths ».
4. L'événement D : « un étudiant au moins préfère les maths ».

Exercice 2 ●○○ **Ecriture ensembliste d'évènements** Soient A et B deux évènements tels que

1. $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,8$. Ces évènements peuvent-ils être incompatibles ?
2. $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$. Donner un encadrement de $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

Exercice 3 ●○○ **Maîtriser les formules de base** Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Quelle est la probabilité que A et B se réalisent
2. Quelle est la probabilité que A ou B se réalisent ?
3. Quelle est la probabilité que A se réalise et pas B ?
4. Quelle est la probabilité que A ne se réalise pas et B ne se réalise pas ?

Exercice 4 ●○○ **Le retour du poker** On considère un jeu de 32 cartes (du 7 jusqu'à l'as). On tire au hasard 5 cartes simultanément une main).

1. Quelle est la probabilité d'avoir un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

Exercice 5 ●○○ **Tirage avec ou sans remise dans une urne** Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   a. A : « le tirage est tricolore »
   b. B : « le tirage contient exactement une boule noire et au moins une rouge »
   c. C : « les trois boules tirées sont de la même couleur »
2. Reprendre les calculs si on suppose que les tirages ont lieu avec remise.

Exercice 6 ●○○ **Codes à quatre chiffres** Le code d'une carte bancaire est une suite de quatre chiffres pris au hasard entre 0 et 9.

1. Calculer la probabilité que ce code soit formé de quatre chiffres distincts ?
2. Calculer la probabilité que ce code soit formé de quatre chiffres pairs distincts ?
3. Calculer la probabilité que ce code soit formé d'une suite de quatre chiffres strictement décroissante ?

Exercice 7 ●●○ **Un dé déséquilibré** On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir un « numéro sur la face supérieure » est proportionnelle au numéro de la face.

1. Déterminer l'espace probabilisé adaptée à cette expérience aléatoire.
2. La probabilité de l'événement A : « obtenir la face 5 ou 6 » est-elle supérieure à l'événement contraire ?

Exercice 8 ●●○ **Un jeu conditionné** Deux paquets (P_1 et P_2) de cartes sont posés sur une table. Le paquet P_1 contient trois cartes rouges et deux noires. Le paquet P_2 contient sept cartes rouges et trois noires.

On lance une pièce de monnaie telle que la probilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{3}$. Si on obtient pile, on tire des cartes successivement (avec remise) dans le paquet P_1, si on obtient face, de même, mais dans le paquet P_2

1. Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge sachant qu'elle vient du paquet P_1 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une première carte rouge ?
3. On a tiré une carte rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du paquet P_1 ?
4. On a tiré n cartes rouge sur les n premiers coups. Quelle est la probabilité qu'elles viennent du paquet P_1 ?

Exercice 9 ●●○ Probabilités conditionnelles Une usine fabrique des feutres pour tableaux blancs avec trois machines M_1, M_2 et M_3 qui produisent respectivement 70%, 10% et 20% des feutres. Un contrôle qualité permet d'estimer à 1% des feutres fabriqués par M_1 qui sont défectueux, 4% des feutres fabriqués par M_2 qui sont défectueux et 3% des feutres fabriqués par M_3 qui sont défectueux.

1. Quelle est la probilité qu'un feutre pris au hasard soit défectueux ?
2. Votre professeur a entre ses mains un feutre défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la machine M_1 ?

Exercice 10 ●●○ Modèle de Markov pour une particule Une particule quantique peut, à un instant n donné, changer de site, avec une probabilité qui dépend de sa position au temps n (en seconde).

A un temps n donné, elle se situe sur un (et un seul) des trois sommets d'un triangle (ABC). De plus,

- si elle se situe au site A, elle peut sauter à l'instant $n+1$ au site B avec une probabilité de 0,75 et au site C avec une probabilité de 0,25.
- si elle se situe au site B, elle peut sauter à l'instant $n+1$ au site A avec une probabilité de 0,75 et au site C avec une probabilité de 0,25.
- si elle se situe au site C, elle saute systématiquement à l'instant $n+1$ au site B.

On note a_n, b_n et c_n les probabilités que la particule soit sur le site A, B ou C au temps n.

1. Déterminer des relations de récurrences entre $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ et (a_n, b_n, c_n).
2. On introduit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$. En déduire X_n en fonction de X_0.
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifiez que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression de M^n en fonction de n, puis celle des suites a_n, b_n et c_n.
5. Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ des probabilités a_n, b_n et c_n.

Exercice 11 ●●○ Evènements indépendants Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On repètè n lancers indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probilité d'obtenir pile est p. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
2. Quelle est la probabilité que face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 12 ●●○ Evènements indépendantes On choisit au hasard une boule d'une urne contenant trois boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants : R : « la boule tirée est rouge », A : « la boule tirée est numérotée 1 », B : « la boule tirée est numérotée 2 ». Les évènements suivantes sont-elles indépendantes ?

1. A et R **2.** A et B **3.** R et B