# Feuille d'exercices 27
# Probabilités 2 : Variables aléatoires

**Exercice 1** •∘∘ **Deux nombres parmi cinq** Une urne contient cinq boules sur lesquelles sont inscrits respectivement les nombres $-2, -1, 0, 1$ et 2. On tire simultanément deux boules de l'urne. On appelle $X$ la variable aléatoire égale au produit de ces deux nombres.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3. Déterminer la loi de $X^2$.
4. Calculer de deux manière différentes $E(X^2)$.

**Exercice 2** ••∘ **Différence de deux dés** On lance deux dés équilibrés à six faces. On appelle $X$ la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros de ces deux dés.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

**Exercice 3** ••∘ **QCM** Un QCM est constitué de 10 questions. Pour chaque question, il y a 4 réponses dont 1 seule est juste. Toute absence de réponse est considérée comme une réponse fausse. Les points sont attribués ainsi : 2 points par bonne réponse et -0,5 par réponse fausse. On appelle $X$ la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses et $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de $X$, calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Montrer que : $Y = 2,5X - 5$ et en déduire $E(Y)$.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une note supérieure ou égale à 17,5.
4. Les concepteurs du QCM se posent toujours la question du choix des paramètres de points positifs et négatifs afin d'éviter que les candidats ne répondent au hasard. A partir de ce QCM, ils attribuent $x$ points par bonne réponse et $y$ par réponse fausse (où $x$ et $y$ sont des réels positifs).
   Montrer que : $E(Y) = \frac{5x-15y}{2}$.
5. En déduire qu'il est tout de même « raisonnable » que $x \geqslant 3y$.

**Exercice 4** ••∘ **Temps d'attente** Une urne contient $n \geqslant 3$ boules numérotées de 1 à $n$ indiscernables au touché. On retire les unes après les autres toutes les boules de l'urne, en notant l'ordre du tirage.

1. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement (dans n'importe quel ordre).
3. On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tirage nécessaire pour avoir tirer les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de $X_n$ ainsi que son espérance

**Exercice 5** •∘∘ **Un exemple de lois conjointes et marginales** Une urne contient une boule blanche, une verte, et deux boules rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note $X$ le rang d'apparaition de la première boule blanche et $Y$ celui de la deuxième boule rouge.

1. Représenter dans un tableau la loi conjointe de $X$ et de $Y$.
2. En déduire les lois marginales de $X$ et de $Y$.
3. Calculer les espérances et les variances de $X$ et $Y$.
4. Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.
5. Soit $Z$ le temps d'attente entre la première boule blanche et la deuxième boule rouge (en valeur absolue). Exprimer $Z$ en fonction de $X$ et $Y$, puis donner la loi de $Z$.

**Exercice 6** ••∘ **Lois géométrique et hypergéométrique sur un exemple** Un(e) étudiant(e) de PTSI désireux de réviser pendant les vacances constitue une liste de 20 exercices de mathématiques et 25 sur les autres matières, dont i (elle)l écrit les énoncés sur des fiches cartonnées et les place dans une boîte. Cet(te) étudiant(e) adore les maths (comment pourrait-il en être autrement ? !).

1. L'étudiant(e) décide de piocher « au hasard » une fiche dans sa boîte, la traiter, la replacer « au hasard » dans la boîte et recommencer. On appelle $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fiches piochées afin d'obtenir pour la première fois un exercice de maths. Déterminer la loi de $X$ et l'espérance de $X$.
2. On reprend la même situation, mais l'étudiant(e) ne replace pas la fiche avant d'en piocher une autre. On appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de fiches piochées afin d'obtenir pour la première fois un exercice de maths. Déterminer la loi de $Y$ et l'espérance de $Y$.
3. On reprend la même situation, mais l'étudiant(e) choisit cette fois 5 fiches au hasard (sans remise). On appelle $Z$ la variable aléatoire décrivant le nombre de fiches de maths piochées. Déterminer la loi de $Z$ et l'espérance de $Z$.

**Exercice 7 ••○ — Loi hypergéométrique** Une population d'élèves de PTSI forment deux groupes disjoints : les matheux et les matheuses d'un côtés et les amateurs et amatrices de SI de l'autre (et tant pis pour la physique), dans des proportions $p \in [0,1]$ et $q = 1-p$. On sélectionne $n$ élèves au hasard (un nombre inférieur à la population totale). On note $X$ le nombre de matheux et matheuses obtenu.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. (Plus dur) Déterminer l'espérance et la variance de $X$.
3. On suppose que la population est de $2n$ élèves. Que donnent les formules précédentes dans ce cas-là ?

**Exercice 8 ••○ — Maximum de variables aléatoires** On tire au hasard, successivement et avec remise deux boules d'une urne contenant $n$ boules indiscernables au touché, numérotées de 1 à $n$. On appelle $Z$ la variable aléatoire correspondant au maximum des deux boules tirées.

1. Pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ fixé, calculer la probabilité $P(Z \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de $Z$.
3. Reprendre l'exercice avec deux tirages successifs avec remise.

**Correction** :

1. Notons $X_1$ le numéro de la première boule tirée, et $X_2$ celui de la deuxième. Ces deux variables suivent des lois uniformes, elles sont par ailleurs indépendantes :
$$X_1 \sim \mathcal{U}([\![1\,,n]\!]) \quad \text{et} \quad X_2 \sim \mathcal{U}([\![1\,,n]\!]).$$
Elles sont par ailleurs indépendantes, et on a
$$Z = \max(X_1, X_2).$$
On peut alors décrire l'évènement concerné :
$$(Z \leqslant k) = (X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k).$$
Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ étant indépendantes, on a alors
$$P((X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k)) = P(X_1 \leqslant k) \times P(X_2 \leqslant k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n}.$$
2. Soit $k \in [\![1\,,n]\!]$, on écrit l'évènement $Z = k$ en fonction de ce qui précède :
$$(Z \leqslant k) = (Z = k) \cup (Z \leqslant k-1),$$
Cette formule gardant un sens pour $k = 1$, l'évènement $Z = 0$ étant impossible. La réunion étant disjointe :
$$P(Z \leqslant k) = P(Z = k) + P(Z \leqslant k-1) \iff P(Z = k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2}$$
en utilisant le résultat de la première question. Apès simplification :
$$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(Z = k) = \frac{2k-1}{n^2}.$$
On vérifie que la somme de ces probabilités vaut 1.

**Exercice 9 ••○ — Variables indépendantes (ou pas)** On tire une carte au hasard dans un jeu non truqué de 32 cartes. On appelle $X$ la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un as et 0 sinon, $Y$ la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un valet et 0 sinon, $Z$ la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Établir la loi conjointe de $X$ et $Y$ ainsi que les lois marginales.
2. Établir la loi conjointe de $Y$ et $Z$ ainsi que les lois marginales.
3. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Même question pour $Y$ et $Z$.

**Exercice 10 ••• — Suite de variables aléatoires : marche aléatoire sur une droite** Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite. A l'instant initial, elle est sur l'origine, et à chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives $p$ et $q = 1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abcisse de la puce à l'instant $n$.

1. Déterminer la loi de $X_n$, son espérance et sa variance.
2. On suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$.
   a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la puce soit à l'origine à l'instant $2k$.
   b. (Plus dur). Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $N_n$ le nombre de passages à l'origine entre l'instant initial et l'instant $n$. Calculer l'espérance de $N_n$ et donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

**Exercice 11 ••○ — Inégalités probabilistes** On suppose que le nombre de fois où un élève consulte son téléphone par heure est une variable aléatoire notée $X$ d'espérance 20.

1. Majorer la probabilité que l'élève ait consulté son téléphone au moins 60 fois en une heure.
2. La variance de $X$ est égale à 5. « Estimer » la probabilité de sortir entre 15 et 25 fois son téléphone.

**Exercice 12 ••○ — Estimer un risque d'erreur** On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. Quel nombre de lancers suffit-il de faire pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$ ? On pourra utiliser une inégalité probabiliste.