Feuille d'exercices 2
Nombres complexes (et géométrie)

Exercice 1 ●○○ — Formes algébriques et inverses

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2}{-3+4i}, \quad z_2 = \frac{(1-2i)}{4+5i}, \quad z_3 = (4-2i)^3, \quad z_4 = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}},\ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Exercice 2 ●○○ — Equations de degré 1 (et conjugués)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z + 2i = iz - 1$. **2.** $2z + i = \overline{z} + 1$. **3.** $z = \overline{z} + 2$.

Exercice 3 ●○○ — Formes trigonométriques bidouillées

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = -5i, \quad z_3 = 2ie^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, même question :

$$z_4 = 1 + i\tan\theta, \quad z_5 = \sin\theta + i\cos\theta.$$

Exercice 4 ●●○ — La force du conjugué

Soient z et z' dans $\mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 ●○○ — La force de la forme exponentielle

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i})^{24}, \quad (\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6 ●○○ — Trouver la moitié

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, ecrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique-exponentielle. En déduire son module et son argument. Retrouver le résultat en travaillant avec la forme algébrique.
2. Même question pour $e^{3i\theta} + e^{9i\theta}$.

Exercice 7 ●○○ — De nouvelles valeurs particulières

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. En étudiant $\frac{z_1}{z_2}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Quelle méthode plus "bourrin" peut-on utiliser en exprimant $\frac{1}{12}$ à partir de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$?

Exercice 8 ●●○ — Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, et qui vérifie de plus

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Calculer $f(i)$, puis en déduire f.

Exercice 9 ●●● — Encore une équation fonctionnelle

Trouver les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifient $f(z) + zf(-z) = 1 + z$.

Exercice 10 ●○○ — Un axe bien connu

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - i| = |z + i|$.

Exercice 11 ●●○

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z et $\frac{1}{z}$ soient orthogonaux.

Exercice 12 ●●●

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 13 ●●● Prendre de la hauteur

On se donne des nombres complexes a, b, c et d, avec $b \neq c$ et $a \neq c$, tels que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{c-a}$ sont imaginaires purs.

1. Interpréter ces conditions pour les points d'affixes respectives A, B, C et D.

2. a. Montrer en développant que $(d-a)(\overline{b}-\overline{c}) + (d-b)(\overline{c}-\overline{a}) + (d-c)(\overline{a}-\overline{b})$ est imaginaire pur.

b. En déduire que $\frac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur.

3. En raisonnant *dans* le triangle ABC, montrer que l'on vient de prouver un résultat de géométrie bien connu.

Exercice 14 ●○○ Identité du parallèlogramme

Montrer que pour tout nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Interprétez géométriquement.

Exercice 15 ●●○ Identité remarquable chez les complexes et inégalité

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in C$, développer $|a+b|^2$.

2. En déduire que $|a+b|^2 \leqslant (1+|a|^2)(1+|b|^2)$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 16 ●●● Identité remarquable chez les complexes et arithmétique

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, factoriser $a^2 + b^2$.

2. On dit qu'un entier $N \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N = a^2 + b^2$. Soient N_1 et N_2 des entiers qui sont somme de deux carrés, montrer que $N_1 N_2$ est encore somme de deux carrés.

Exercice 17 ●●○ Encore du conjugué

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $4z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 ●●○ Eviter trop de calculs

On cherche les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Montrer que cette équation est équivalente à $z\overline{z} - (z + \overline{z}) = 7$.

2. Faire apparaître la quantité $|z-a|^2$ pour un $a \in \mathbb{C}$ bien choisi et conclure.

Exercice 19 ●●○ Une fraction qui se simplifie

1. Trouver les nombres complexes tels que 1, z et z^2 sont alignés
2. Plus dur : même question avec z, z^2 et z^4.

Exercice 20 ●●●

Que pensez-vous de l'affirmation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad z^n \in \mathbb{R}.$$

On pourra utiliser que $\pi \notin \mathbb{Q}$...

Exercice 21 ●●● Similitudes directes

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé.

a. Pour un $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, expliquer et illustrer avec un dessin la nature géométrique d'une fonction vérifiant $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

b. Pour un $\lambda > 0$ fixé, même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.

c. Même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \omega - z$.

Pour un z donné, on pourra représenter le vecteur d'affixe $z - \omega$, et décrire le point d'affice $f(z)$.

2. Appliquer à la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$s(z) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \sqrt{3}(1-i)$$

l'algorithme qui suit :

- Montrer que l'équation $s(z) = z$ possède une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée ω.
- Déterminer un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $s(z) - \omega = \alpha(z - \omega)$. On pensera à écrire $s(z) - \omega = s(z) - s(\omega)$.
- Mettre α sous forme trigonométrique et donner la nature géométrique de s.