Feuille d'exercices 2
Nombres complexes (et géométrie)

Exercice 1 ●○○ — Formes algébriques et inverses

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2}{-3+4i}, \quad z_2 = \frac{(1-2i)}{4+5i}, \quad z_3 = (4-2i)^3, \quad z_4 = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}},\ \theta \in]-\pi,\pi[.$$

Exercice 2 ●○○ — Equations de degré 1 (et conjugués)

Résoudre les équations suivantes :

1. $z + 2i = iz - 1$. **2.** $2z + i = \overline{z} + 1$. **3.** $z = \overline{z} + 2$.

Exercice 3 ●○○ — Formes trigonométriques bidouillées

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

$$z_1 = -3+3i, \quad z_2 = -5i, \quad z_3 = 2ie^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, même question :

$$z_4 = 1 + i\tan\theta, \quad z_5 = \sin\theta + i\cos\theta.$$

Exercice 4 ●●○ — La force du conjugué

Soient z et z' dans $\mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Correction : Notons que ce quotient est bien défini puisque $1+zz \neq 0$ par hypothèse. Appelons-le q. On sait que q est réel si et seulement si $\overline{q} = q$. Calculons donc

$$\overline{q} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\overline{z'}}$$

N'oublions pas que z et z' sont dans $\mathbb{U}$, ce qui veut dire

$$|z|^2 = |z'|^2 = 1,$$

et donc que

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \quad \text{et } \overline{z'} = \frac{1}{z'}.$$

On déduit

$$\overline{q} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = q.$$

Cela prouve donc que q est réel.

Remarque : Si on ne pense pas à la caractérisation « q réel si et seulement si $q = \overline{q}$ », on peut essayer de multiplier numérateur et dénominateur de q par $\overline{(1+zz')}$ et utiliser $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. A la fin doit reconnaître des quantités comme $z + \overline{z}$ et $z' + \overline{z'}$ qui sont réelles.

Exercice 5 ●○○ — La force de la forme exponentielle

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i})^{24}, \quad (\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6 ●○○ — Trouver la moitié

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, ecrire $e^{3i\theta} + e^{9i\theta}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 7 ●○○ — De nouvelles valeurs particulières

Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. En étudiant $\frac{z_1}{z_2}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Quelle méthode plus "bourrin" peut-on utiliser en exprimant $\frac{1}{12}$ à partir de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$?

Correction : L'énoncé sugère de calculer $\frac{z_1}{z_2}$. Faisons de deux manières :

- Sous forme exponentielle. On a après calculs $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et donc

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

- Sous forme algébrique. On a directement :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1+i)(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i(\frac{\sqrt{3}-1}{4}).$$

En égalisant ces dux formes, on obtient :

$$\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i(\frac{\sqrt{3}-1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}).$$

On identifie les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

On pouvait directement écrire

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) \text{ et } \sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$$

et utiliser des formules d'addition.

Exercice 8 ●●○ — Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, et qui vérifie de plus

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Calculer $f(i)$, puis en déduire f.

Exercice 9 ●●● — Encore une équation fonctionnelle

Trouver les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifient $f(z) + zf(-z) = 1 + z$.
Correction :
Soit $z \in \mathbb{C}$, on applique la relation vérifiée par f au complexe $-z$:

$$f(-z) - zf(z) = 1 - z.$$

On cherche à éliminer le terme en $f(-z)$, pour cela on multiplie cette dernière relation par z, et on la soustrait à la première. On obtient :

$$f(z) + z^2 f(z) = 1 + z - z(1-z) \iff (1+z^2)f(z) = 1 + z^2.$$

Si $1 + z^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $z \in \mathbb{C} \backslash \{i, -i\}$, on déduit que nécessairement

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{i, -i\}, \quad f(z) = 1.$$

Ceci est une condition nécessaire (on a en effet raisonné par implication au moment où on a ajouté deux égalités), et elle est bien susffisante comme on peut le vérifier directement.

Il reste à déterminer les valeurs de $f(i)$ et $f(-i)$. Pour n'importe quel couple $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vérifiant $b - ia = 1 - i$, on peut poser $f(i) = a$ et $f(-i) = b$. Cependant, il est naturel de poser $f(i) = f(-i) = 1$ pour obtenir une fonction continue sur $\mathbb{C}$.

Exercice 10 ●○○ — Un axe bien connu

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - i| = |z + i|$.

Exercice 11 ●●○

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z et $\frac{1}{z}$ soient orthogonaux.

Exercice 12 ●●●

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z^2}{z+1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 13 ●●● — Prendre de la hauteur

On se donne des nombres complexes a, b, c et d, avec $b \neq c$ et $a \neq c$, tels que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{c-a}$ sont imaginaires purs.

1. Interpréter ces conditions pour les points d'affixes respectives A, B, C et D.
2. a. Montrer en développant que $(d-a)(\overline{b} - \overline{c}) + (d-b)(\overline{c} - \overline{a}) + (d-c)(\overline{a} - \overline{b})$ est imaginaire pur.

   b. En déduire que $\frac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur.
3. En raisonnnant *dans* le triangle ABC, montrer que l'on vient de prouver un résultat de géométrie bien connu.

Exercice 14 ●○○ — Identité du parallèlogramme

Montrer que pour tout nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Interprétez géométriquement.

Exercice 15 ●●○ — Identité remarquable chez les complexes et inégalité

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in C$, développer $|a+b|^2$.
2. En déduire que $|a+b|^2 \leqslant (1+|a|^2)(1+|b|^2)$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 16 ●●● Identité remarquable chez les complexes et arithmétique

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, factoriser $a^2 + b^2$.
2. On dit qu'un entier $N \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés lorsqu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N = a^2 + b^2$. Soient N_1 et N_2 des entiers qui sont somme de deux carrés, montrer que $N_1 N_2$ est encore somme de deux carrés.

Exercice 17 ●●○ Encore du conjugué

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $4z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 ●●○ Eviter trop de calculs

On cherche les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Montrer que cette équation est équivalente à $z\overline{z} - (z + \overline{z}) = 7$.
2. Faire apparaître la quantité $|z-a|^2$ pour un $a \in \mathbb{C}$ bien choisi et conclure.

Exercice 19 ●●○ Une fraction qui se simplifie

1. Trouver les nombres complexes tels que 1, z et z^2 sont alignés
2. Plus dur : même question avec z, z^2 et z^4.

Exercice 20 ●●● Vrai ou faux ?

Que pensez-vous de l'affirmation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad z^n \in \mathbb{R}.$$

On pourra utiliser que $\pi \notin \mathbb{Q}$...

Exercice 21 ●●● Similitudes directes

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Expliquer avec un dessin la nature géométrique des fonctions f vérifiant
   - Pour un $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
   - Pour un $\lambda > 0$ fixé, $f(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.
   - $f(z) - \omega = \omega - z$.

   Pour un z donné, on pourra représenter le vecteur d'affixe $z - \omega$, et décrire le point d'affice $f(z)$.
2. Appliquer à la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$s(z) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \sqrt{3}(1-i)$$

   l'algorithme qui suit :
   - Montrer que l'équation $s(z) = z$ possède une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée ω.
   - Déterminer un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $s(z) - \omega = \alpha(z - \omega)$. On pensera à écrire $s(z) - \omega = s(z) - s(\omega)$.
   - Mettre α sous forme trigonométrique et donner la nature géométrique de s.