Feuille d'exercices 3
Calculs algébriques : sommes, produits...

Exercice 1 ●○○ Repérer des téléscopages

1. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-3\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}.$$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

2. En faisant apparaître $k+1$ au numérateur, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 2 ●○○ Calcul d'une somme avec un glissement

Soit n un entier non nul, On cherche à calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

1. En effectuant un glissement d'indice, exprimer S_n comme somme de deux sommes.
2. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$ en fonction de S_n et conclure.

Exercice 3 ●○○ Une quantité importante

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 4 ●●○ Une autre somme de sinusoïdes

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les sommes

$$C_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+bk) \quad \text{et} \quad S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+bk)$$

Exercice 5 ●●○ Sommes doubles

Soit n un entier non nul, calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$,
2. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 6 ●●○ Deuxième calcul, avec un somme double

On retrouve le la valeur de S_n définis dans l'exercice 2 :

1. Posons $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = S_n$.
2. Intervertir la somme double et conclure.

Exercice 7 ●●○ Un polynôme

Soit n un entier non nul, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})$$

1. Donner P_1 et P_2.
2. Montrer que P_n est un polynôme dont on donnera le degré.
3. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
4. Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \frac{x+n}{x}P_n(x-1).$$

5. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_n(q)$.

Exercice 8 ●●●

1. Soit n un entier non nul, et p un entier compris entre 1 et n. Montrer que

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k} \quad \text{(Formule comité-président).}$$

Retrouver $\sum_{p=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^n$.

2. En s'inspirant du cours, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Exercice 9 ●●●

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall p \in [\![0\,;\,,]\!] \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. En évaluant cela pour des p bien choisis, retrouver

$$\sum_{k=0}^{n} k, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Exercice 10 ●●○ Troisème calcul, avec un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. En calculant f' de deux manière différentes, déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
2. Retrouver la somme S_n de l'exercice 2.
3. Comment calculeriez-vous $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k$?

Exercice 11 ●●○ Linéariser pour intégrer

Donner une primitive de $\sin^6 x$ et de $\sin^4 x \cos x$.

Exercice 12 ●●○ De nouvelles valeurs particulières

Montrer que $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ puis $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 13 ●●● De nouvelles valeurs particulières, bis

1. Montrer que $\sin(5x) = P(\sin x)$, où P est défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.
2. Montrer que $\sin(\frac{\pi}{10})$ est solution de l'équation $P(x) = 1$, puis de l'équation

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

3. Trouver deux réels a et b tels que $16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 16(x-a)^2(x-b)^2$.
4. Donner la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 14 ●●○ Une équation trigonométrique

1. Factoriser le polynôme $x \mapsto 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ (noter que $x = \frac{1}{2}$ est racine).
2. Résoudre l'équation $\cos(3x) = 2\cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.