Feuille d'exercices 5
Nombres et fonctions réels

Exercice 1 ●○○ — (In)équations d'ordre 1 avec valeurs absolues

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a. $|x+9| = 4$. **b.** $|x+4| = |x-3|$. **c.** $|x+2| + 2|x-1| + 3|x+1| = 27$.

2. Mêmes questions pour les inéquations suivantes :

   a. $|x-3| > 2$.

   b. $|x+4| \leqslant 5$.

   c. $|-3x+1| > 5$.

   d. $|(x-1)(x+2)| > 10$.

Exercice 2 ●○○ — Contrôler le produit

Montrer que le produit de deux nombres réels est inférieur ou égal, en valeur absolue, à la moyenne de leurs carrés.

Exercice 3 ●○○ — Formules pour le min et le max

Montrer les formules suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice 4 ●●○ — Un principe des tiroirs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ des réels tels que

$$0 \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1.$$

Montrer qu'il existe deux entiers i et j entre 1 et n distincts tels que $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 5 ●●○ — Domaines de définitions

Trouver le plus grand domaine de définition possible pour les fonctions suivantes :

1. **a.** $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^2-64}$ **b.** $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$ **c.** $x \mapsto \ln(|\sin x|)$

2. Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum de ces fonctions sur leur ensemble de définition.

Exercice 6 ●○○ — La racine symétrisée

Etudier la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

Exercice 7 ●○○ — Parabole à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$. Esquisser le graphe de la fonction pour $m = 0$.
Pour quel(les) valeur(s) du réel y l'équation $y = f(x)$ admet-elle une unique solution ?

Exercice 8 ●●○ — Centres et axes de symétrie

1. Soient a et b deux réels. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède le point M de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie.
2. Soient a un réel. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
3. La fonction $x \mapsto \frac{3}{(x-4)^2}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$, possède-t-telle un centre ou un axe de symétrie ? La tracer.

Exercice 9 ●●○ — Une forme optimale

1. On souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volumé fixé avec un minimum de matériau. Quelles proportions choisir ?
2. Même question avec une casserole.

Exercice 10 ●●○ — Définir une composée

Déterminer (s'ils existent) les ensembles de définitions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, puis les expliciter.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \ln(x-5)$.
2. $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sqrt{-x + \frac{1}{2}}$.
3. $f(x) = -e^x - 2$ et $g(x) = \ln(x+1)$.

Exercice 11 ●●○ Trouver des bornes

Préciser les domaines de définitions des fonctions suivantes, puis dire si elles sont minorées, majorées, bornées, et si elles admettent un minimum ou un maximum :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **2.** $x \mapsto \cos(x)\cos(2x)$. **3.** $x \mapsto e^{-x}\cos x$.

Exercice 12 ●●○ Des calculs explicites

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Tracer la fonction.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$ donné, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle bijective ? et si on la définissait de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$?
4. Trouver un intervalle I tel que $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$, et préciser la fonction réciproque.

Exercice 13 ●○○ Exemples de bijection (ou pas)

Les fonctions suivantes définissent-elles une bijection, sur un ensemble à préciser ? Si oui, donner leur fonction réciproque.

1. $x \mapsto 2x - 3$.
2. $x \mapsto 2 - \frac{1}{x-5}$.
3. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

Exercice 14 ●●○ Une réciproque et sa dérivée

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{2}}{x^2+1}$$

1. Montrer que f est une bijection. La fonction réciproque est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
3. Calculer $f(\sqrt{2})$, puis en déduire $(f^{-1})'(\frac{4}{3}\sqrt{2})$.
4. Vous sentez-vous capable de trouver une expresion générale pour f^{-1} ?

Exercice 15 ●●○ Décomposer avant de dérivée

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées n^{e} des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur leurs domaines de définition.
2. En déduire la dérivées n^{e} de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur son domaine de définition (on se souviendra du calcul préliminaire lors du calcul de la somme des $\frac{1}{k(k+1)}$ dans le chapitre précédent).

Exercice 16 ●●● Passer dans le complexe

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n^{e} de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^x$.
Question bonus : donner le tableau de variation de la fonction, et l'esquisser.