Feuille d'exercices 6
Ensembles, logiques et fonctions

Exercice 1 ●○○ — Ensembles en extension

Ecrire les ensembles suivants en extension :

1. L'ensemble des nombres premiers entre 1 et 20.
2. l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q}, r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant 4, p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant q \leqslant 2p\}$.

Exercice 2 ●●● — Ensembles en compréhension

Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

1. L'ensemble des nombres entiers pairs.
2. Etant données deux points A et B du plan, l'ensemble des points de la droite (AB).
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, infiniement dérivables, dont la courbe est au dessus de toutes ses tangentes.

Exercice 3 ●○○ — Opérations ensemblistes

Pour chacun des cas suivants, on se donne un ensemble E et des sous-ensembles A et B. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\complement_E A$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]3, +\infty[$ et $B = [-4, +\infty[$
3. $E = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}$ et $B = [|-3, 2|]$.

Exercice 4 ●●○ — Des conditions pour l'inclusion

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

1. Montrer que $A \cup B = B \iff A \subset B$.
2. Montrer que $A \cap B = B \iff B \subset A$.
3. Montrer que $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$.
4. Soit C un troisième élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(A \backslash B) \backslash (C \backslash B) = A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C).$$

Exercice 5 ●●○ — Différence symétrique

Soit E un ensemble, et A, B et C des parties de E. On appelle différence symétrique de A et de B, l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

1. Faire un diagramme.
2. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$ et $A \Delta E$.
3. Montrer que $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Exercice 6 ●●○ — Une équation ensembliste

Dans un ensemble E, A et B étant donnés, on considère l'équation

$$A \cap X = B,$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des solutions (on pourra procéder par analyse-synthèse).
2. Faire de même avec l'équation $A \cup X = B$.

Exercice 7 ●●○ — produit cartésien dans le plan

1. Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, et dire s'ils peuvent s'écrire comme un produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$.
   - **(i)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 3 \text{ et } 5 \leqslant y < 6\}$.
   - **(ii)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant x < 4 \text{ et } y = 3\}$.
   - **(iii)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant x < 4 \text{ et } y = 3x + 1\}$.
   - **(iv)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x, y) = x$, et $p_2(x, y) = y$.
   - **(i)** Quels noms donneriez-vous à p_1 et p_2 ?
   - **(ii)** Déterminer l'image par p_1 de chacun des ensembles de la question précédente.
   - **(iii)** Soient a et b deux réels avec $a < b$. Déterminer et représenter les images réciproques $p_1^{-1}(\{a\})$ et $p_2^{-1}([a, b])$.
   - **(iv)** Les applications p_1 et p_2 sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 8 ●●● — Composée n^{e}

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définies par $g(x) = x + 1$, et $h : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{x+2}$.

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la composée n^{e}

$$f^n = f \circ \ldots \circ f,$$

avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

1. Déterminer g^n.
2. Peut-on définir $h \circ h$?
3. On note h_0 la restriction de h à $\mathbb{R}\backslash[-2, -1[$. Montrer que l'on peut définir $h_0 \circ h_0$, puis h_0^n.
4. Calculer h_0^n.

Exercice 9 ●○○ — Injective ou surjectives ?

Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3, 2y - 1)$.
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(z) = |z|$.

Exercice 10 ●●○ — Avec l'inversion

Soit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

1. Dire si f est injective, surjective, bijective.
2. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
4. On note $i\mathbb{R}$ la droite des complexes de partie réelle nulle. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

Exercice 11 ●○○ — Avec les chiffres des nombres

1. On considère la fonction $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier associer la somme de ses chiffres.
   (i) Dire si f est injective, surjective, bijective.
   (ii) Déterminer la valeur maximale de $a \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de S à $[|32, a|]$ soit une injection. Est-ce une surjection ?
2. On considère la fonction $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier associer son dernier chiffre.
   (i) Dire si S est injective, surjective, bijective.
   (ii) Donner l'image de D. Proposer une restriction de D qui soit une bijection sur cette image.

Exercice 12 ●●● — Trouver le point commun

On a vu dans le cours que si E et F sont deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction, alors pour toutes parties A et B de E, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

1. On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. On suppose maintenant que f n'est pas injective. Exhiber A et B tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Qu'avons nous démontré ?

Exercice 13 ●●● — Deux composées pour trois bijections

Soient E, F, G et H quatre ensembles, ainsi que $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois fonctions. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

Exercice 14 ●○○ — Prolonger une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Donner la régularité de f.
2. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 ●●● — Une inégalité pour contrôler les accroissements.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$.

1. Etudier les variations de $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$
2. Montrer également que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.
3. On considère la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \alpha x^3$ avec $\alpha > \frac{e}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
4. En déduire que
$$\forall x \in [-1, 1], \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha|x|^3.$$
5. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$, qui est de plus dérivable.