Feuille d'exercices 7
Fonctions usuelles

Exercice 1 ●○○ Maîtriser les puissances

Résoudre les (in)équations suivantes (on prendra bien soin au domaine de validité des quantités en jeu) :

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$? **2.** $x^{\sqrt{2}/x} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$. **3.** $e^{\ln|x|} \geqslant e^{|\ln x|}$ **4.** $x^{\ln x} \leqslant x$.

Exercice 2 ●●○

1. Donner le domaine de définition $A \subset \mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 10(x-1)^{x-1}(3-x)^{3-x}$.
2. Montrer que le graphe de la fonction possède des symétries que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout $x \in A$, on a $10 \leqslant f(x)$.

Exercice 3 ●●○ Des entiers

Pour quelles valeurs $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ a-t-on $n^p = p^n$? On pourra chercher à faire intervenir la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 4 ●●○ La tangente hyperbolique

Soit la fonction $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Etudier cette fonction.

Exercice 5 ●○○

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes (on pourra poser $X = e^x$) :

   (i) $\operatorname{ch} x = \sqrt{5}$. **(ii)** $\operatorname{sh} x = \sqrt{35}$. **(iii)** $\operatorname{ch} x < \sqrt{26}$.

Exercice 6 ●○○ Formules hyperboliques (non exigibles)

Montrer les formules suivantes (on pourra ne pas s'attaquer à toutes, et s'assurer qu'on a compris le mécanisme) :

1. (Addition et duplication) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
   - **(iv)** $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
2. (Conversion produit-somme) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right)$.
   - **(ii)** $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right)$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right)$.
3. (Conversion somme-produit) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$.
   - **(iv)** $\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(y) = 2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Ces formules ne sont pas à apprendre par coeur.

Exercice 7 ●○○ Formules hyperboliques

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(4x) = 8\operatorname{ch}^4 x - 8\operatorname{ch}^2 x + 1$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16}\operatorname{sh}(5x) - \frac{5}{16}\operatorname{sh}(3x) + \frac{10}{16}\operatorname{sh} x$.
3. Donner une primitive de $x \mapsto \operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 8 ●●○ Souvenez-vous pour les sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$, ainsi que a et b deux réels. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 9 ●●● Paramétrage et déphasage hyperbolique

On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que le système
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$$
d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ ait une solution, puis le résoudre.
2. On suppose que (a,b) vérifie $a > 0$ et $a^2 > b^2$. Montrer que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
3. On suppose que $a < 0$ et $a^2 > b^2$. En déduire que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = -\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
4. Etablir des résultats similaires pour $x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ lorsque $b^2 > a^2$ (on permutera intelligement les rôles des paramètres).

Exercice 10 ●○○ — Revenir aux définition

Simplifier les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(-\sin \frac{\pi}{6})$. **2.** $\operatorname{Arcsin}(\cos \frac{11\pi}{3})$.

Exercice 11 ●●○ — Etudier une fonctions

Etudier la fonction $f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{1+x}{1-x}$: domaine de définition, et de dérivabilité, variations, représentation graphique, et plus si affinités.

Exercice 12 ●○○ — En étudiant les fonctions

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 13 ●●○ — Raisonnements et formules

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\operatorname{Arctan} \frac{n}{n+1} + \operatorname{Arctan} \frac{n+1}{n+2} = \operatorname{Arctan} \alpha,$$
puis exprimer α en fonction de n. Appliquer avec $n = 3$.

Exercice 14 ●●○ — Formules et raisonnements

Résoudre par analyse-synthèse les équations suivantes :

1. $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin}(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{2}$. **2.** $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{5}{13}$.

Exercice 15 ●●○ — Si on peut éviter de dériver...

Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} x^3$.

1. Etudier les variations de la fonctions.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$.
3. Résoudre cette équation.

Exercice 16 ●●● — Formules de type de Machin

On démontre des formules qui relient le nombre π à l'arctangente de fractions. Celles-ci ont été utiles pour approcher π, car on a des méthodes pour approcher l'arctangente d'un nombre (surtout s'il est petit).

1. Montrer que
   - **(i)** $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
   - **(ii)** $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
   - **(iii)** $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
2. Il est possible de retrouver ces formules en introduisant les nombres complexes qui vont bien. Par exemple, soient $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 7 + i$. En calculant un argument de $z_1^2 z_2$ de deux manières différentes, retrouver la troisième formule.
3. **(i)** Pour $x \in [0, \frac{\pi}{8}[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
   - **(ii)** En déduire $4 \tan(4 \operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}))$.
   - **(iii)** En déduire
   $$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$
   Introduire des nombres complexes z_1 et z_2 pour une preuve moins calculatoire, similaire à la question 2.
   - **(iv)** En utilisant un développement limité de Arctan en 0, en déduire une approximation de π.

Exercice 17 ●●○ — Simplifier une somme

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$.
2. Simplifier la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{k^2 + k + 1})$$
et étudier sa limite lorsque $n \to +\infty$.