Feuille d'exercices 7
Fonctions usuelles

Exercice 1 ●○○ Maîtriser les puissances

Résoudre les (in)équations suivantes (on prendra bien soin au domaine de validité des quantités en jeu) :

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$? **2.** $x^{\sqrt{2}/x} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$. **3.** $e^{\ln|x|} \geqslant e^{|\ln x|}$ **4.** $x^{\ln x} \leqslant x$.

Correction

1. Corrigé en TD

2. Les quantités en jeu sont bien définies lorsque $x > 0$. L'équation se réecrit alors, d'après la définition d'une puissance :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\sqrt{2}}{x}\ln x} = e^{\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} &\iff \frac{\sqrt{2}}{x}\ln x = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) \\ &\iff \frac{\sqrt{2}}{x}\ln x = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } 2^{3/2} = x^{3/2} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

3. Corrigé en TD.

4. Les quantités en jeu sont bien définies lorsque $x > 0$. On peut démarrer l'exercice avec la forme exponentielle, on peut aussi tout diviser par x qui est strictement positif pour simplifier l'inéquation :

$$\begin{aligned} x^{\ln x} \leqslant x &\iff x^{\ln x - 1} \leqslant 1 \\ &\iff e^{\ln(x)\times(\ln x - 1)} \leqslant 1 \\ &\iff \ln(x)\times(\ln x - 1) \leqslant 0 \end{aligned}$$

On fait alors une disjonction de cas selon les signes de $\ln(x)$ (ce qui dépend de la position de x par rapport à 1) et $\ln(x) - 1$ (ce qui dépend de la position de x par rapport à e) :

- Si $x \in]0, 1[$, les deux facteurs sont strictement négatifs, et x n'est pas solution de l'inéquation.
- Si $\in [1, e]$, on a $\ln x \geqslant 0$ et $\ln x - 1 \leqslant 0$, donc $\ln(x) \times (\ln x - 1) \leqslant 0$.
- Si $x > e$, les deux facteurs sont strictement positifs, et x n'est pas solution de l'inéquation.

En conclusion :

$$x^{\ln x} \leqslant x \iff x \in [1, e].$$

Exercice 2 ●●○

1. Donner le domaine de définition $A \subset \mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 10(x-1)^{x-1}(3-x)^{3-x}$.
2. Montrer que le graphe de la fonction possède des symétries que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout $x \in A$, on a $10 \leqslant f(x)$.

Correction

1. Corrigé en TD.

2. Corrigé en TD.

3. On a, pour $x \in A$:

$$\begin{aligned} 10 \leqslant f(x) &\iff 10 \leqslant 10e^{(x-1)\ln(x-1)+(3-x)\ln(3-x)} \\ &\iff 0 \leqslant (x-1)\ln(x-1) + (3-x)\ln(3-x). \end{aligned}$$

Il reste à étudier la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = (x-1)\ln(x-1) + (3-x)\ln(3-x)$$

afin de montrer qu'elle est bien positive. On calcule sa dérivée. Rappelons que pour une fonction u, la fonction $\ln(u)$ a pour dérivée $\frac{u'}{u}$. Donc en dérivant les produits :

$$g'(x) = 1 + \ln(x-1) - 1 - \ln(3-x) = \ln(\frac{x-1}{3-x}).$$

Il reste à trouver le signe. On a, en notant que $3 - x > 0$ pour $x \in A$:

$$\ln(\frac{x-1}{3-x}) \leqslant 0 \iff \frac{x-1}{3-x} \leqslant 1 \iff x - 1 \leqslant 3 - x \iff x \leqslant 2,$$

et de même,

$$\ln(\frac{x-1}{3-x}) \geqslant 0 \iff \geqslant 2.$$

On dresse le tableau de variation de g :

x	1		2		3
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$g(x)$	$2\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2$

Notons, même si cela n'est pas utile pour l'exercice, qu'au bord de A, c'est-à-dire en 1 et en 3, g' n'est pas définie, mais g admet une limite, qui vaut $2\ln 2$.

Ainsi, g a un unique point critique en 2, et c'est un minimum par lecture du tableau de variation. Or $g(2) = 0$, et donc

$$\forall x \in A, \quad g(x) \geqslant 0,$$

ce qui équivaut bien à $10 \leqslant f(x)$ d'après ce qui précède.

Exercice 3 ●●○ — Des entiers

Pour quelles valeurs $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ a-t-on $n^p = p^n$? On pourra chercher à faire intervenir la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 4 ●●○ — La tangente hyperbolique

Déjà, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1,$$

la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de telles fonctions, avec le dénominateur qui ne s'annule pas. On a de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x),$$

et la fonction th est donc impair.

On a de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}^2(x)},$$

car $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. Or d'après le cours, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1,$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0.$$

Cela prouve que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour chercher la limite lorsque $x \to +\infty$, on écrit :

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Notez la technique de mise en facteur du terme le plus grand lorsque $x \to +\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, on déduit par quotient de limites :

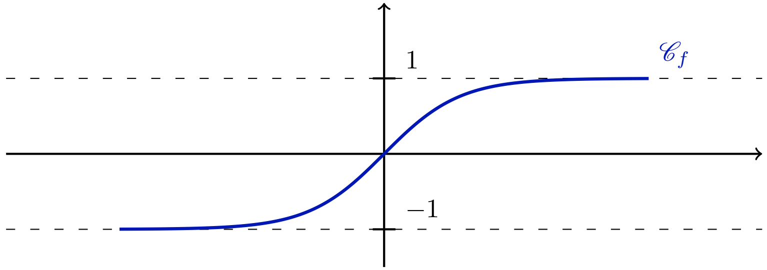
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

Puisque la fonction est impaire, on a aussi

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1.$$

Notons que $\operatorname{th}(0) = 0$ et $\operatorname{th}'(0) = 1$, et donc la droite $y = x$ est tangente à la courbe en l'origine.

Finalement, on peut tracer la fonction



Exercice 5 ●○○

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes (on pourra poser $X = e^x$) :

   (i) $\operatorname{ch} x = \sqrt{5}$. **(ii)** $\operatorname{sh} x = \sqrt{35}$. **(iii)** $\operatorname{ch} x < \sqrt{26}$.

Exercice 6 ●○○ — Formules hyperboliques (non exigibles)

Montrer les formules suivantes (on pourra ne pas s'attaquer à toutes, et s'assurer qu'on a compris le mécanisme) :

1. (Addition et duplication) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :

(i) $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$ et $\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$.
(ii) $\operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(x)$.
(iii) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$ et $\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$
(iv) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$.

2. (Conversion produit-somme) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :
(i) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y))$.
(ii) $\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y))$.
(iii) $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y))$.
3. (Conversion somme-produit) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :
(i) $\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y)=2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$.
(ii) $\operatorname{ch}(x)-\operatorname{ch}(y)=2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.
(iii) $\operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y)=2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$.
(iv) $\operatorname{sh}(x)-\operatorname{sh}(y)=2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Ces formules ne sont pas à apprendre par coeur.

Exercice 7 ●○○ — Formules hyperboliques

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(4x)=8\operatorname{ch}^4x-8\operatorname{ch}^2x+1$.
2. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{sh}^5x=\frac{1}{16}\operatorname{sh}(5x)-\frac{5}{16}\operatorname{sh}(3x)+\frac{10}{16}\operatorname{sh}x$.
3. Donner une primitive de $x\mapsto\operatorname{sh}^5x$.

Exercice 8 ●●○ — Souvenez-vous pour les sommes trigonométriques

Soit $n\in\mathbb{N}$, ainsi que a et b deux réels. Calculer

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb)\quad\text{et}\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 9 ●●● — Paramétrage et déphasage hyperbolique

On se donne $(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que le système

$$\begin{cases}\operatorname{ch}(y)=a\\ \operatorname{sh}(y)=b\end{cases}$$

d'inconnue $y\in\mathbb{R}$ ait une solution, puis le résoudre.

2. On suppose que (a,b) vérifie $a>0$ et $a^2>b^2$. Montrer que :

$$\exists\varphi\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\quad a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x=\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{ch}(x+\varphi).$$

3. On suppose que $a<0$ et $a^2>b^2$. En déduire que :

$$\exists\varphi\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\quad a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x=-\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{ch}(x+\varphi).$$

4. Etablir des résultats similaires pour $x\mapsto a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$ lorsque $b^2>a^2$ (on permutera intelligement les rôles des paramètres).

Exercice 10 ●○○ — Revenir aux définition

Simplifier les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(-\sin\frac{\pi}{6})$. **2.** $\operatorname{Arcsin}(\cos\frac{11\pi}{3})$.

Exercice 11 ●●○ — Etudier une fonctions

Etudier la fonction $f(x)=\operatorname{Arcsin}\frac{1+x}{1-x}$: domaine de définition, et de dérivabilité, variations, représentation graphique, et plus si affinités.

Exercice 12 ●○○ — En étudiant les fonctions

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{Arctan}(x)\geqslant\frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 13 ●●○ — Raisonnements et formules

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{Arctan}\frac{n}{n+1}+\operatorname{Arctan}\frac{n+1}{n+2}=\operatorname{Arctan}\alpha,$$

puis exprimer α en fonction de n. Appliquer avec $n=3$.

Exercice 14 ●●○ — Formules et raisonnements

Résoudre par analyse-synthèse les équations suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}x+\operatorname{Arcsin}(x^2+x-1)=\frac{\pi}{2}$. **2.** $\operatorname{Arcsin}x=\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}$.

Exercice 15 ●●○ — Si on peut éviter de dériver...

Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} x^3$.

1. Etudier les variations de la fonctions.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$.
3. Résoudre cette équation.

Exercice 16 ●●● Formules de type de Machin

On démontre des formules qui relient le nombre π à l'arctangente de fractions. Celles-ci ont été utiles pour approcher π, car on a des méthodes pour approcher l'arctangente d'un nombre (surtout s'il est petit).

1. Montrer que
   (i) $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
   (ii) $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
   (iii) $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
2. Il est possible de retrouver ces formules en introduisant les nombres complexes qui vont bien. Par exemple, soient $z_1 = 3 + i$ et $z_2 = 7 + i$. En calculant un argument de $z_1^2 z_2$ de deux manières différentes, retrouver la troisième formule.
3. **(i)** Pour $x \in [0, \frac{\pi}{8}[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.
   (ii) En déduire $4\tan(4 \operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}))$.
   (iii) En déduire
   $$4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$
   Introduire des nombres complexes z_1 et z_2 pour une preuve moins calculatoire, similaire à la question 2.
   (iv) En utilisant un développement limité de Arctan en 0, en déduire une approximation de π.

Exercice 17 ●●○ Simplifier une somme

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$.
2. Simplifier la somme
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{k^2 + k + 1})$$
   et étudier sa limite lorsque $n \to +\infty$.