Feuille d'exercices 8
Arithmétique

Exercice 1 ●○○ Une inégalité

Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^{n-1} \leqslant n!$$

Exercice 2 ●○○ Inégalité de Bernoulli

Montrer que
$$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1+nx \leqslant (1+x)^n.$$
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 3 ●●○ Calculer des sommes

Montrer par récurrence les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Pour $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 4 ●○○ Identité remarquable modulo 2

Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, montrer que $(a+b)^2$ est pair si et seulement si a^2+b^2 l'est. Enoncer le résultat obtenu en terme de congruences.

Exercice 5 ●●○ Equations et diviseurs

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $(n-1)(n+2) = 10$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $p^2 - q^2 = 16$.

Exercice 6 ●●○ Trouver des diviseurs

1. Soit n un entier. Montrer que $n! + n - 1$ n'est jamais premier.
2. Montrer que $n(n-1)$ est toujours pair, puis avec les mêmes idées que $n^4 - n^2$ est toujours divisble par 12

Exercice 7 ●●○ Retour en petite classe

1. Réduire la fraction $\frac{3696}{1638}$.
2. Mettre au même dénominateur $\frac{31}{210} + \frac{17}{126}$.

Exercice 8 ●○○ Division euclidienne

Trouver les entiers $n \in [\![0\,,200]\!]$ dont le reste dans la divisien euclidienne de n par 45 vaut 18.

Exercice 9 ●●○ Théorème de Gauss et équation diophantienne

1. (Téorème de Gauss). Soient a, b et c trois entiers. On suppose que a/bc et que $a \wedge b = 1$. Montre qu'alors a/c (on notera que a/ac).
2. On veut résoudre l'équation
$$5x - 3y = 7$$
d'inconnu le couple $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   a. Donner une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b. Montre que
$$5(x - x_0) = 3(y - y_0).$$
   c. Utliser le théorème de Gauss pour montrer que les solutions sont de la forme $(x_0 + 3k, y_0 + 5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   d. Montrer que réciproquement un couple de cette forme est solution.

Exercice 10 ●●○ PGCD et théorème de Bezout

1. Soient a et b deux entiers. On suppose qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et un entier p premier tel que

$$au + bv = p.$$

Quelles sont les valeurs possibles pour $a \wedge b$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$. Montrer que les valeurs possibles pour $a \wedge b$ sont 1 et 19.

3. Plus dur : donner un critère sur n pour lequel $a \wedge b = 1$.

Exercice 11 ●●● Racines irrationnelles

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n ne soit pas le carré d'un entier. Supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, et écrivons $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que tout diviseur premier de q^2 divise aussi p^2.

2. En déduire que $q = 1$ puis conclure.

Exercice 12 ●●●

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

2. La question précédente est classique, nous allons ici creuser pour déterminer de tels x et en déduire un résultat d'arithmétique.

   a. En introduisant une équation de degré deux à coefficients entiers, donner les valeurs possibles pour x.

   b. Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $pq/(p + q)^2$. Déduire de la question précédente les valeurs que peuvent prendre p et q. On pourra s'aider de l'exercice "racines irrationnelles".