Feuille d'exercices 9
Suites

Exercice 1 ●○○ Inf et sup

Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembvles suivants :

1. $A = \{3^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.

2. $B = \{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$.

3. $B = \{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*\}$.

Exercice 2 ●●○ Le retour de la trigo

Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$.

1. Si vous disposez d'un outil graphique, représenter A.

2. Montrer que A est une partie non vide et borné de $\mathbb{R}$.

3. Etudier $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$ et $\min(A)$.

4. Mêmes questions avec $B = A \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 3 ●●○ Le symbole égal pour un analyste

Soient a et b deux réels, montrer que

$$a = b \iff \forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon.$$

Exercice 4 ●○○ Limites epsilonesques

Donner les limites des suites suivantes avec vos connaissances du lycée, puis démontrer vos résultats de manière epsilonesque

1. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ **2.** $v_n = \sqrt{n} - 1$.

Exercice 5 ●○○ Limites faciles

Déterminer (si elles existent) les limites des suites suivantes en utlisant les règles usuelles :

1. $u_n = (-3n^2 + 100)(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2})$. **2.** $\frac{n^2+\sin n}{n+1}$ **3.** $v_n = \sqrt{4n-1} - \frac{6n+1}{\sqrt{9n+1}}$.

Exercice 6 ○○○ Trouvez la stratégie

Etudier la monotonie des suites suivantes :

1. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$

2. Pour $n \geqslant 0$, $v_n = -n^2 + n + 2$.

3. $(w_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $w_{n+1} = w_n^2 - w_n + 1$ et $w_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 ○○○ Trouvez la stratégie

Etudier les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{\pi}{n} - \frac{7}{n^3}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+3}-n}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ et u_0 quelconque.

Exercice 8 ●●○ Suites entières convergentes

Soit u_n une suite d'entier qui converge. Que dire ?

Exercice 9 ●○○ La série harmonique diverge

Soit $(S_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. Supposons que $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge, quelle serait la limite de $(S_{2n} - S_n)_{n \geqslant 1}$?

3. Conclure

Exercice 10 ●●● La série harmonique corrigée converge

Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On définit aussi les suites

$$u_n = S_n - \ln(n) \quad v_n = S_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(\frac{n+1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Démontrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.
3. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0 telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \ln n + \gamma + w_n.$$
Le nombre $\gamma \in \mathbb{R}$ est connu sous le nom de constante d'Euler, il est encore très mystérieux 300 ans plus tard.
4. Soit la suite définie pour $n \geqslant 1$ par
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$
Exprimer (s_n) à partir de (S_n), et en déduire la limite de (s_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 ●○○ — N'inventons pas de règle

Pour deux suites (u_n) et (v_n) réelles, montrer que les règles suivantes sont fausses en exhibant un contre exemple :

1. Si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) converge. Et si on suppose de plus que (u_n) converge ?
2. Si $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors (u_n) et (v_n) converge vers 0. Montrer qu'il est aussi faux que u_n **ou** (v_n) converge vers 0 en général.

Exercice 12 ●●○ — Suites cosinus et sinus d'entiers

On s'intéresse aux suites $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ et $(\sin n)_{n\geqslant 0}$

1. Supposons que $(\cos n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   a. En étudiant $(\cos(2n))_{n\geqslant 0}$, que dire de ℓ ?
   b. Etudier $(\cos(n+1) + \cos(n-1))_{n\geqslant 0}$ et conclure.
2. Effectuer le même travail pour la suite $(\sin n)_{n\geqslant 0}$, (étudier la suite $\sin(n+1) - \sin(n-1)$).

Exercice 13 ○○○ — Relation de récurrence

Soit la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2 + 1} \quad \text{et} \quad u_0 = -1.$$

Cette suite est-elle minorée ? majorée ? monotone ?

Exercice 14 ●●○ — Relation de récurrence

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que cette suite est bien définie, et que de plus $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Mettre la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ après avoir définie une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ adéquate.
   b. En étudiant les variations de f, démontrer que la suite est croissante et donner sa valeur minimum.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(1 - u_n).$$
4. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1 - u_0).$$
5. On pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire une expression de (u_n).

Exercice 15 ●●○ — Racines d'une suite de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$P_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que P_n admet une unique racine sur $[0, 1]$, que l'on note u_n.
2. Comparer $P_{n+1}(u_n)$ et $P_{n+1}(u_n)$, puis en déduire les variations de u_n.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Montrer que sa limite est nulle (raisonner par l'absurde).