Chapitre 12 - Primitives et équations différentielles linéaires

Encore une fois, dans ce chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. Nous introduisons une nouvelle convention : les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont notés indifféramment $\mathbb{K}$. cette convention va nous permettre de donner des résultats sans énoncer à chaque fois “$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$” et reviendra dans la suite de l’année.

1 Primitives : Utilité et calcul

1.1 Primitives et liens avec les intégrales

Définition 1 - Primitives d’une fonction continue. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur I. On appelle primitive de f toute fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable vérifiant

$$F' = f.$$

Exemple 2 - Quelques exemples.

- Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x(2-x)e^{-x}$.
- Donner des primitives des fonctions cos et sin.
- Donner des primitives de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$.

✖ **Attention !** ✖ Attention : primitiver est BEAUCOUP plus dur que dériver, en particulier on ne peut pas toujours trouver de formules pour la dérivée d’une fonction. Ne soyez pas naïf en donnant des réponses instantannées fausses. Nous allons voir des stratégies pour calculer concrêtement une primitive

Il n’y a pas unicité parmi les primitives d’une fonction, mais le résultat suivant montre qu’il est facile de relier les différentes primitives d’une fonction :

Théorème 3 - Unicité à une constante additive près. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur I. Supposons que l’on connaisse une primitive F de f sur I. Alors les autres primitives de f sont exactement les fonctions $F + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

✖ **Attention !** ✖ Pour cette raison, lorsqu’on a trouvé UNE primitive de f, on évitera de dire LA primitive de f, puisqu’il y en a une infinité d’autres.

De plus, dans ce théorème, il est important que l’intervalle de définition soit un intervalle. Par exemple, les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$F_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } < 0 \end{cases}$$

vérifient $F_1'(x) = F_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$, mais elles ne diffèrent pas d’une constante. Le programme se concentre pour l’instant sur les fonctions définies sur un intervalle.

On introduit une notation pratique et très utilisée mais dure à manipuler :

Notation 4 - Notation de Leinbitz pour une primitive générique. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur I. On note $\int f$ une primitive de f, ou encore $\int^x f(t)\,dt$ une primitive de f évaluée en x.

Cette notation est doublement ambigüe :

- Elle ne désigne pas une fonction particulière, mais une fonction à une constante près. Par exemple

$$\int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + 1$$

- On lira souvent (livres, exercices...)

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$$

Cette notation est maladroite, car la variable x à gauche est muette, mais pas à droite. On fait ici la confusion entre F et $F(x)$. Cette confusion peut être tolérée, mais elle peut conduire à des erreurs, prudence !

Attention ! $\int f$ (ou $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$) ne se lit pas « intégrale de f » mais « une primitive de f » (évaluée en x).

On rappelle que pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ donnée, et pour $(a, b) \in I \times I$ le nombre réel $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t$ désigne l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f, délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$. Un chapitre sera consacré aux intégrales.

Théorème 5 - Lien entre primitive et intégrale. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Soit $a \in I$ fixé. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{K}$ définie sur I par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$F' = f \quad \text{et } F(a) = 0.$$

En particulier, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Pour que le théorème soit complet, il faudrait énoncer au préalable le fait que la fonction F ainsi définie est dérivable. Pour l'instant, concentrez-vous sur le lien entre « intégrale avec une borne qui bouge » et primitive.

Exemple 6 - Trouver une composée. Donner la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \int_0^{2x} e^{-3t}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 7 - Utiliser les théorèmes sur la dérivée. Soit f une fonction continue. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 8 - Lien entre intégrale et primitive. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Soient $(a, b) \in I \times I$ fixés. Soit $F : I \to \mathbb{K}$ une primitive de f. Alors on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Bien sûr, si on n'a pas déterminé concrètement une primitive de f (voir sections suivantes), ce théorème ne sert à rien. Inutile d'injecter dans cette formule la formule donnée dans le théorème 5 : vous allez tourner en rond... Par contre, il ouvre de grande porte au niveau théorique par la remarque suivante :

Remarque 9 - Formule numéro 1 de l'analyse. Si on applique ce theorème à une fonction dérivée f' (avec f de classe C^1, on obtient le « théorème fondamental » de l'analyse :

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

1.2 Connaître et reconnaître des primitives

Voici différentes méthodes élémentaires pour trouver des primitives « à vue »

Les primitives usuelles Impensable de ne pas les connaître, elles découlent de vos connaissances sur les dérivées. Voici un tableau (les primitives sont données à une constante près) :

	Fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	I
1	x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ ]0\,,+\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
2	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0[$
3	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
4	a^x (a>0)	$\frac{1}{\ln a} \times a^x$	$\mathbb{R}$
5	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
6	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
7	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
8	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
9	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
10	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arccos} x$	$]-1,1[$
11	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1,1[$
12	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F(ax)$	$\frac{1}{a}D_f$: D_f dilaté de $\frac{1}{a}$
12	$f(x+\alpha)$	$F(x+\alpha)$	D_f translaté de $-\alpha$.

Reconnaître la dérivée d'une composée On se repose sur la formule $(F \circ u)' = u' \times (f \circ u)$. On peut y penser dès que l'on voit un produit, (ou une fonction de la forme $x \mapsto f(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé, voir ligne 12 précédente). Les plus communes sont listées dans le tableau suivant, qui n'est fnalement qu'une redite du paragraph précédent :

	Fonction $u' \times (f \circ u)$	primitive $F \circ u$	Condition sur u
1	$u'u^{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	$\begin{cases} \text{aucune} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ u<0 \text{ ou } u>0 & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ u>0 & \text{sinon} \end{cases}$
1 bis	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
2	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	$u < 0$ ou $u > 0$
3	$u' \, \mathrm{e}^{u}$	e^{u}	
5	$u' \operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u$	aucune
6	$u' \operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u$	aucune
7	$u' \sin x$	$-\cos u$	aucune
8	$u' \cos x$	$\sin u$	aucune
9	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	$\mathbb{R}$
10	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arccos} u$	$-1 < u < 1$
11	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$-1 < u < 1$

On peut ajouter le classique suivant, qui en fait est déjà caché dans le tableau ci-dessus :

Exemple 10 - Primitive de la tangente. Calculer une primitive de la fonction tan, en précisant le domaine de définition.

1.3 Transformer l'intégrale : IPP et changement de variable

Dans cette section on présente deux méthodes pour calculer des primitives, qui consiste à transformer le problème en espérant en obtenir un plus simple.

Rappelons qu'étant données deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\int f + g = \int f + \int g \quad \text{et} \quad \int (\lambda f) = \lambda \int f.$$

On dit que "primitiver est une opération linéaire".

✖ **Attention !** ✖ ATTENTION. Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I, et F et G leurs primitives. ALORS ON N'A PAS $\int fg = F \times G$ en général : la primitive du produit n'a aucune raison d'être le produit des primitives

Pour palier ce problème, il existe une méthode qui permet de transformer la primitive d'un produit, et que nous connaissons déjà (voir chapitre 1) :

Proposition 11 - Intégration par parties (IPP). Soient deux fonctions u et v continues et dérivables sur un intervalle I,

$$\int (u'v) = u \times v - \int (uv').$$

En d'autres termes, avec des notations évidentes, $\int(f\times G) = FG - \int(F\times g)$.

Exemple 12 - Intégration par parties (IPP). Donner une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto xe^{-2x}$.

Proposition 13 - Changement de variable. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Soient a et b dans J, alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cette formule est dure à décoder, mieux vaut apprendre les différentes étapes pratique :

✎ **En pratique** ✎ Pour mettre en place le changement de variable, une fois la fonction φ choisie, on prépare le terrain en "posant" $u = \varphi(t)$, et en transformant l'intégrale selon trois étapes :

- Les bornes.
- L'élément différentiel, qui se trouve en écrivant les choses « à la physicienne » :

  $$\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

  Sur son brouillon, on peut mélanger les anciennes et nouvelles variables, mais lors de la rédaction, chaque intégrale ne doit comporter qu'une seule variable !
- La fonction sous le signe intégral : on remplace l'expression en t par une fonction de u. Si on a bien travaillé, la fonction f est apparu d'elle-même. Si non, on peut "inverser" le changement de variable (ce qui n'est pas toujours possible !).

En fait, quand on fait un changement de variable dans une intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, on a souvent une intérale de la forme de gauche, sans l'avoir vraiment vue. Faire le changement de variable permet « d'ouvrir les yeux ».

Exemple 14 - Changement de variable. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Application à la recherche de primitive Le résultat précédent est énoncé pour le calcul d'intégrales. On peut l'exploiter pour le calcul des primitives, mais l'étape de gestion des bornes doit être adaptée :

Exemple 15 - Changement de variable. Donner une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto \frac{\ln(t)^n}{t}$ en posant $u = \ln t$.

✖ **Attention !** ✖ Il y a une très grosse subtilité : on ne peut pas toujours « forcer » un changement de variable si l'intégrale n'est pas de la forme $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. En particulier :

- Il peut être tentant de faire le changement de variable dans l'autre sens, en posant $t = \psi(u)$ dans une intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction ψ bien choisie. On n'aurait plus qu'à remplacer froidement la variable t par $\psi(u)$, et $\mathrm{d}t$ par $\psi'(u)\,\mathrm{d}u$. Le soucis, c'est que rien ne garantit que ψ renvoie des valeurs dans le domaine de définition de g, ou dans l'intervalle $[a, b]$. Par exemple, vous viendrait-il à l'idée de poser $t = u^2$ dans $\int_{-2}^{-1} g(t)\,\mathrm{d}t$?
- On peut aussi essayer de forcer les choses en posant $u = \varphi(t)$ dans $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, mais l'introduction artificelle du facteur $\varphi'(t)$ risque de poser des soucis. Essayez donc de poser $u = \sin t$ dans $\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t$. Un soucis intervient au niveau des bornes. Si on avait voulu forcer le facteur différentiel $\cos t\,\mathrm{d}t$ à apparaître, on aurait eu :

  $$\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t,$$

  et là on voit le soucis : la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{\cos t}$ n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$.

Heureusement au programme, on se contente de cas "qui marchent"... mais retenez que la situation peut très vite se compliquer.

1.4 Transformer la fonction

Les fractions rationnelles Les fractions rationnelles sont les quotients de polynômes. Nous aurons un chapitre consacré à ces objets, pour l'instant on s'intéresse au cas des fonctions du type

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bc + c}.$$

On cherche à factoriser, ou bien écrire sous forme canonique le dénominateur, selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$
  - × On sait qu'il existe deux racines r_- et r_+ au trinôme $x \mapsto ax^2 + bc + c$, que l'on calcule. On a donc $ax^2 + bc + c = a(x - r_-)(x - r_+)$.
  - × On cherche deux constantes α et β réelles telles que
  $$\frac{1}{ax^2 + bc + c} = \frac{1}{a(x - r_-)(x - r_+)} = \frac{\alpha}{x - r_-} + \frac{\beta}{x - r_+}.$$
  La méthode la plus efficace est de multiplier le tout par $(x - r_-)$ puis évaluer en $x = r_-$ (et la même chose avec r_+). On peut aussi mettre au même dénominateur et identifier, mais il y a un système 2×2 à résoudre.
  - × On conlut en utilisant $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-r} = \ln|x - r|$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne peut être factorisé sur $\mathbb{R}$.
  - × On cherche sa forme canonique (voir chapitre 4) en trouvant des constantes α et β telles que
  $$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x + \alpha)^2 + \beta^2}.$$
  - × On travaille un peu pour se ramener à $\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$ (changement de variable $v = x + \alpha$ puis $u = \frac{\sqrt{a}}{\beta}v$) et on utilise la fonction Arctan. Bien sûr, on doit concrêtement calculer toutes ces constantes...
- Si $\Delta = 0$, il y a une unique racine $r \in \mathbb{R}$ que l'on calcule, et
  $$\frac{1}{ax^2 + bc + c} = \frac{1}{a(x - r)^2}.$$
  La primitive est $-\frac{1}{a(x-r)}$
- Et avec un numérateur ?
  - × si c'est une fonction affine, on peut commencer à faire apparaître la dérivée $2ax + b$ du dénominateur.
  - × Si c'est un polynôme plus élevé, on essaye quelques techniques de magie, par exemple
  $$\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}.$$
  Nous généraliserons ces techniques au chapitre dédié.

Exemple 16 - Primitives de fractions rationnelles.

1. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+x+1}$, en précisant le domaine de définition.
2. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$, en précisant le domaine de définition.

Expo et trigo : en passant par les exponentielles complexes On cherche à calculer les primitives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto \cos(ax)e^{bx} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin(ax)e^{bx} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

On pourrait penser que l'IPP est naturelle (et d'ailleurs elle fonctionne), mais il existe une méthode plus directe : **passer par les complexes** : on rattache cosinus et sinus à une exponentielle complexe (ou, on utilise les formules d'Euler, ce qui revient au même) :

$$\cos(ax)e^{bx} = \mathrm{Re}(e^{iax+bx}) \quad \text{et} \quad \sin(ax)e^{bx} = \mathrm{Im}(e^{iax+bx}).$$

Or

$$\int^x e^{iat+bt}\,\mathrm{d}t = \int^x e^{(ia+b)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ia+b}e^{(ia+b)x}.$$

Il n'y a plus qu'à calculer la forme algébrique, et récupérer les parties réelles et imaginaires.

✖ **Attention !** ✖ Les règles de primitives chez les complexes passent toujours par les parties réelles et imaginaires. Ainsi, ne tentez pas d'écrire

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-i} = \ln(x-i),$$

mais calculez les parties réelles et imaginaires de $x \mapsto \frac{1}{x-i}$ avec la technique du conjugué.

2 Equations différentielles linéaires

On revient sur l'étude des équations différentielles linéaires. On rappelle la méthode générale :

- On associe l'équation homogène, que l'on résout avec les méthodes du cours.
- On cherche une solution particulière de l'équation inititiale.
- On utilise le théorème de superposition.

Nous allons approfondir ces méthodes.

2.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

On a résolu lors du premier chapitre des équations de la forme

$$y'(x) + ay(x) = b(x),$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une **constante**, b une fonction donnée, et y est une fonction inconnue. Vous vous souvenez de la méthode de résolution ? Nous allons nous attaquer à un cran de difficulté supplémentaire en étudiant où le coefficient a n'est plus un nombre fixé mais une fonction.

Théorème 17 - Equadiff homogène d'ordre 1. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0. \tag{1}$$

Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Les solutions de cette équations sont exactement les fonctions de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-A(x)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notation 18 - Equadiff homogène d'ordre 1. On peut aussi dire : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En pratique, il faut donc être capable de trouver une primitive de la fonction a pour résoudre une équation homogène. Les primitives diffèrent d'une constante, mais on peut noter que si on remplace A par $A + K$ avec $K \in \mathbb{R}$, alors λe^{-A} devient $\lambda e^{-K} e^{-A} = \lambda' e^{-A}$: la constante de primitivation est absorbée par celle devant l'exponentielle, ouf !

Notez que la fonction nulle est toujours solution d'une équation homogène.

Exemple 19 - Une équation homogène. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = xy(x).$$

On rappelle le principe de superposition :

Théorème 20 - Théorème de superposition. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière, notée y_p. Alors l'ensemble des solutions est

$$\{y_p + y_h,\ y_h \text{ solution de l'équation homogène associée (1)}\}$$

Il reste à trouver une solution particulière. L'idée de chercher « au nez » une fonction qui a la même forme que b reste valide, mais les choses peuvent se compliquer avec la fonction a. Il y a deux idées nouvelles :

Superposition des solutions particulières C'est l'idée qui permet de décomposer le problème.

Proposition 21 - Superposition des solutions particulières. Supposons qu'on regarde un équation différentielle dont le second membre est une somme de fonctions :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x).$$

Soit y_k une solutions particulière de l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_k.$$

Alors la fonction $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est solution particulière de l'équation différentielle

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x).$$

Exercice 22 - Superposition de solutions particulières. Trouver une solution particulière à l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = \cos x + e^{2x}.$$

La méthode de la variation de la constante C'est l'idée générique. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. Considérons une équation différentielle avec second membre

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x). \tag{2}$$

On sait que la solution de l'équation homogène associée est de la forme

$$y_h(x) = \lambda e^{-A(x)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } A = \int a.$$

Théorème 23 - Méthode de variation de la constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière de (2) sous la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}, \quad \text{avec} \quad \lambda : I \to \mathbb{R} \text{ une fonction inconnue.}$$

Elle aboutit et passe par un calcul de primitive.

✎ **En pratique** ✎ Par « elle aboutit », on entend que la preuve est constructive et est à répeter (voir prise de notes). On trouve que la fonction candidate est solution si et seulement si

$$\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)},$$

encore un fois on est devant un calcul de primitive qu'il faut mener à bien.

Exemple 24 - Exemple de variation de la constante. Trouver une particulière pour l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2xy(x) = e^{x^2+x}$$

Exemple 25 - En combinant les deux méthodes. Trouver une solution particulière de l'équation

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad y'(x) - \frac{1}{1+x}y(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

En déduire l'ensemble des solutions.

Définition-théorème 26 - Problème de cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. Fixons $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors on appelle problème de Cauchy le système

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

d'inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$. La deuxième ligne du système est parfois appelée « condition initiale ».

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Il existe une unique solution au problème de Cauchy ci-dessus.

✎ **En pratique** ✎ Bien que ce théorème garantisse l'existence d'une solution, en pratique on doit souvent résoudre le problème (avec toutes les étapes décrites ci-dessus). La condition initiale sert à souvent à déterminer la valeur de la constante apparaissant dans la solution.

Exemple 27 - Résolution complète d'un problème de cauchy. Transformer en un problème de Cauchy, puis résoudre le problème

$$\begin{cases} xy'(x) + y(x) = x^2 e^x \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Méthode d'Euler Il s'agit d'une méthode *numérique* pour approcher les solutions d'une équation différentielle à l'aide de l'outil informatique.

Avant de se lancer, il est essentiel de comprendre comment sont perçues les notions d'intervalle et de fonction pour la plupart des langage de programmation. Un intervalle est souvent modélisé par une *discrétisation*, c'est à dire qu'il est approché par une suite finie de points, par exemple

$$[0, 1] \underset{\text{discrétisation}}{\approx} \{0, 0.1, \dots, 0.9, 1\}.$$

Dans cet exemple, on parle de discrétisation *régulière*, avec un *pas* de $0.1 = \frac{1}{10}$, qui consiste à découper l'intervalle en 10 (et donc avec 11 points de discrétisation). Pour approcher une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on va discrétiser ses valeurs. Ainsi pour approcher son graphe $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in I\}$, dans notre exemple on obtient :

$$\mathcal{G} \underset{\text{discrétisation}}{\approx} \{(0, f(0)), (0.1, f(0.1)), \dots, (0.9, f(0.9)), (1, f(1)\}.$$

Il ne reste plus qu'à relier ces points pour obtenir une approximation du graphe de f. Plus le pas est petit, plus la discrétisation a des chances d'être fidèle (enfin, cela dépend tout de même des variations de la fonction $f\dots$).

La **méthode d'Euler** est un algorithme qui permet d'approcher les valeurs d'une fonction y solution d'une équation différentielle, même si on n'a pas réussi à résoudre cette équation différentielle.

Supposons que l'on s'intéresse à un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

sur un intervalle $[x_0, x_f]$.

On se donne $N \in \mathbb{N}$, et une discrétisation $(x_k)_{k=0,\dots,N}$ de $[x_0, x_f]$, avec un pas h, c'est-à-dire que

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Imaginons que l'on a déjà approché des valeurs de la solution jusqu'à $y(x_k)$. La clef de la méthode d'Euler est d'écrire

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}.$$

Or puisque y est solution de l'équation différentielle, $y'(x_k)$ est connue. On déduit la relation

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h\left(b(x_k) - a(x_k)y(x_k)\right).$$

On peut ainsi construire les valeurs approchées de $(y(x_k))_{k=0,\dots,N}$ de proche en proche.

Voici l'algorithme en python :

Algorithm 1 Méthode d'Euler pour résoudre (3)

Entrées : Deux fonctions a et b, deux réels $x_0 < x_f$, un entier N, une valeur initiale y_0

Sorties : Un graphe, et un vecteur « fonction » des valeurs approchées de la solution discrétisée

```
h = (x_f − x_0)/float(N)
x = x_0
y = x_0
pour i in range(N) faire
    y = y + h (b(x) − a(x)y)
    x = x + h
    temps.append(x)
    fonction.append(y)
plt.plot(temps,fonction)
return fonction
```

2.2 Equations Linéaires d'ordre 2

Nous allons passer rapidement sur les résultats déjà vus au chapitre 1, mais en utilisant cette fois-ci notre connaissance des exponentielles complexes :

On rappelle qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est de la forme

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \tag{4}$$

Ici, f est une fonction donnée continue, a, b et c trois coefficients complexes ou réels, et y une fonction inconnue.

On commence par étudier l'équation homogène

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{5}$$

et l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + br + c = 0 \tag{6}$$

d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

On a vu au chapitre 1 quelles sont les solutions lorsque les coefficients sont réels (à revoir). Maintenant on étudie le cas complexe, qui englobe le cas réel :

Théorème 28 - Résolution de l'équation homogène, cas complexe. Les solutions de (5) dépendent du discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ de l'équation caractéristique (6) :

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux solutions distinctes complexes, appelées racines, notées r_1 et r_2. Les solutions de (5) sont de la forme
$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},$$
où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ sont deux constantes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution complexe, appelée racine double, notée r. Les solutions de (5) sont de la forme
$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{rx},$$
où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ sont deux constantes.

En fait, ce théorème englobe le cas déjà vu où a, b et c sont réels :

- Si $\Delta \geqslant 0$, les formules sont les mêmes que dans le cas réels.
- Si $\Delta < 0$, on écrit
$$r_1 = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \alpha + i\beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$
On a alors
$$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\, e^{\alpha x}$$
Les formules d'Euler permettent de relier (A, B) et (λ, μ).

Les différents principes de superposition, déjà vus au chapitre 1 et dans ce chapitre pour les équations différentielles d'ordre 1, restent vrais. Ainsi pour résoudre l'équation avec second membre (4), il reste à trouver une solution particulière.

Stratégie pour la solution particulière . Nous nous concentrons sur les formes suivantes du second membre f :

- Si f est de la forme $f(x) = e^{\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ fixé, alors
  - × Si ω n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme $\alpha e^{\omega x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ à trouver.
  - × Si ω est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme $(\alpha + \beta x)e^{\omega x}$ avec . . . .
  - × Si ω est racine double de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)e^{\omega x}$ avec . . . .
- Pour le cas à coefficients réels, Si f est de la forme $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ fixé, alors
  - × Si $i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme $\alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \sin(\omega x)$ avec . . . .
  - × Si $i\omega$ est racine (forcément simple) de l'équation caractéristique, on cherche y_p sous la forme $(\alpha_1 + \beta_1 x)\cos(\omega x) + (\alpha_2 + \beta_2 x)\sin(\omega x)$ avec . . . .
- Si f est un polynôme de degré n, $f(x) = P_n(x)$:
  - × Si $c \neq 0$, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
  - × Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré $n + 1$.
  - × Si $b = c = 0$, on doit juste primitiver deux fois P_n.

N'oubliez pas les différents outils pour transformer des fonctions trigonométriques : formules d'Euler pour se ramener à des exponentielles complexes, linéarisation pour transformer les puissances de fonctions trigonométriques.

Exemple 29 - Des solutions exponentielles. Résoudre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2y''(x) + 3y'(x) - 5y(x) = 5e^{3x} + e^{-2x} + 3x.$$

Exemple 30 - Des solutions réelles ou complexes. Résoudre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = (\cos x)^3 - x^2.$$

On présentera des solutions sous la forme complexes puis réelles.

Pour aller plus loin (HP) Si le second membre est de la forme $f(x) = P_n(x)e^{\omega x}$ où P_n est un polynôme de degré n, on cherche y_p sous la forme

$$y_p(x) = Q_n e^{\omega x}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \deg Q_n = n & \text{si } \omega \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ \deg Q_n = n+1 & \text{si } \omega \text{ est racine simple de l'équation caractéristique} \\ \deg Q_n = n+2 & \text{si } \omega \text{ est racine double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

Dans tous les cas, si on a oublié cette méthode, on pourra toujours chercher y_p sous la forme $Q_n(x)e^{\omega x}$ en injectant dans l'équation différentielle et trouver une équation sur Q_n.

Définition-théorème 31 - Problème de cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz. Soient b et c deux complexes, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Fixons $x_0 \in I$, ainsi que $y_0 \in \mathbb{C}$ et $y_1 \in \mathbb{C}$. Alors on appelle problème de Cauchy le système

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases},$$

d'inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Il existe une unique solution au problème de Cauchy ci-dessus.

✎ **En pratique** ✎ Dans la résolution d'une équation différentielle d'ordre deux apparaissent deux constantes (on les a appelées λ et μ). Si on veut vérifier les deux conditions initiales, cela fournit un système de deux équations à deux inconnues.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est très clair en cinématique : la loi de Newton fournit en générale une équation sur l'accélération, donc une équation d'ordre deux sur la position. Si on préscrit la position et la vitesse initiale, on peut déterminer de manière exacte la trajectoire de l'objet en mouvement.