Chapitre 14 - Analyse asymptotique et relation de comparaison

1 Relations de comparaison

On présente trois notations qui permettent de comparer des fonctions *localement*, c'est-à-dire dans le voisinage d'un point a (éventuellement infni). On rappelle qu'une propriété est vraie dans un voisinage V d'un point a s'il existe un intervalle V contenant a, ou dont a est une extrémité, tel que la propriété est vraie sur V.

Exemple 1 - Exemples de propriétés vraies dans un vosinage. Vérifiez que les propriétés suivantes sont vraies :

- La fonction $x \mapsto \sin x$ ne s'annule pas dans un voisinage de 0, sauf en 0.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est C^1 et $a \in I$ avec $f'(a) > 0$, alors f est strictement croissante dans un voisnage de a.

Dans toute cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère aussi a, un point dans I ou à une extrémité de I, ce qui inclut les cas $a = -\infty$ et $a = +\infty$. On suppose (et c'est important), que les fonctions f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a.
Les trois définitions, nouvelles, doivent être sues par coeur :

Définition 2 - Relation de comparaison.

- (Dominé par). On dit que f est dominée par g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est borné dans un voisinage de a. On note
$$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),$$
et on lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ au voisinage de a », ou plus simplement « en a ».
- (Négligeable devant). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 0$. On note
$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),$$
et on lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ au voisinage de a », ou plus simplement « en a ».
- (Equivalent à). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = 1$. On note
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x),$$
et on lit « $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de a », ou plus simplement « en a ».

Notation 3 - D'autres notations.

- Comme toujours la variable x est muette, ainsi on peut dire $f \underset{a}{=} O(g)$, $f \underset{a}{=} o(g)$ ou encore $f \underset{a}{\sim} g$. Encore faut-il avoir bien défini les fonctions au préalable !
- Dans certains ouvrages, le « $x \to a$ » est placé sous le o ou le O. Cela donne : $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$. Le sens est le même.

Voici une première liste d'exemples vitaux avant de voir les règles de calculs de ces nouveaux symboles :

Exemple 4 - Exemples de relations de comparaison.

- Montrer que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- Soit P un polynôme de dégré n, c'est-à-dire
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$
Donner un équivalent de P en $+\infty$.
- Une fonction f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$.
- Une fonction f tend vers 0 en a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$.
- On a $x^3 \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.
- On a $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to+\infty}{=} O(\frac{1}{x})$.

✖ **Attention !** ✖ Les relations de comparaisons sont des notions *locales* : elles décrivent des propriétés vraies dans un voisinage d'un point a. On ne peut RIEN déduire ailleurs, en particulier, on évitera de déduire des propriétés de monotonie à partir d'une relation de comparaison.
Il est donc ESSENTIEL de toujours préciser OÙ a lieu la comparaison en n'oubliant pas le « en a » à l'oral, ou bien en mettant « $x \to a$ » sous les notations à 'écrit.

✎ **En pratique** ✎ Il est standard de présenter les relations de comparaisons avec des quantificateurs. Par exemple, si $a \in I$, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ lorsque
$$\exists \eta > 0, \exists C > 0, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \quad |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$
On a des définitions similaires pour les autres relations : il suffit de reprendre vos définitions de limites !

Proposition 5 - Liens entre les relations de comparaison.

1. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$, pratique pour les calculs.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, réciproque fausse.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O(f(x))$, réciproque fausse.

Remarque 6 - Relation d'équivalence. On a les trois propriétés évidentes suivantes :

- (Réflexivité) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
- (Symétrie) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
- (Transitivité) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

On parle de « relation d'équivalence » (hors programme). Grâce à la symétrie, on peut d'ailleurs dire « f et g sont équivalentes en a ». Attention, les idées autour du symbole $\sim$ n'ont rien à voir avec son homonyme, votre symbole préféré, $\iff$, qui relie des propositions logiques ! ne mélangez pas les deux.

Remarque 7 - Des écritures multiformes. Les notations « $= o(g)$ » et « $= O(g)$ » servent à désigner des fonctions que l'on compare à une fonction de référence g. Le symbole « $=$ » est trompeur : dans le premier cas, il s'agit en fait d'une limite, et dans le deuxième d'une inégalité. En particulier, on peut comparer une fonction à différentes fonction. Par exemple on a
$$x \underset{x\to+\infty}{\sim} x, \quad \text{et} \quad x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$$
ou encore
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} O(x) \quad \text{et} \quad \sin x \underset{x\to 0}{=} O(1).$$
On peut même arriver à des écritures contre-intuitives, par exemple :
$$10x \underset{x\to 0}{=} O(x).$$

✖ **Attention !** ✖ La relation équivalence recèle de nombreux pièges, par exemple

- Ne jamais écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, car cela veut dire que vous considérez le quotient $\frac{f}{0}$.
- On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents en général. Par exemple, dans l'exemple de la remarque précédente, on aurait en soustrayant $1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 0$, ce qui n'a aucun sens.
- Il existe d'autres pièges. Le mieux est de s'en tenir aux définitions et aux quelques régles qui vont suivre.

Proposition 8 - Croissances comparées et échelle de comparaison.

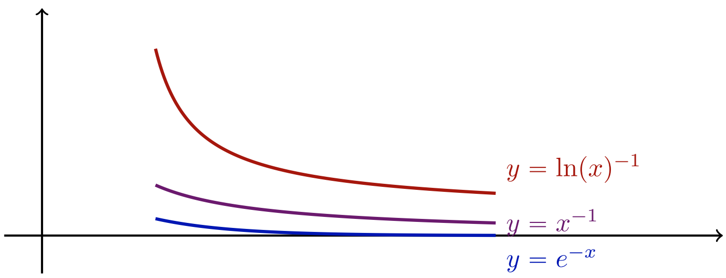
Croissances comparées Soient α, β et γ des réels positifs. Alors

- Croissances comparées en $+\infty$: $\ln^\beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.
- Croissances comparées en 0 : $x^\alpha \ln^\beta(x) \underset{x\to 0}{=} o(1)$.

Pour des réels α, β et γ négatifs, on inverse l'ordre des comparaisons.

Comparaison des puissances Soient α_1 et α_2 des réels avec $\alpha_1 < \alpha_2$, alors

- Echelle de comparaison en $+\infty$: $x^{\alpha_1} \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\alpha_2})$.
- Echelle de comparaison en 0 : $x^{\alpha_2} \underset{x\to0^+}{=} o(x^{\alpha_1})$.



C'est tout simplement ce que vous disiez depuis quelques mois : « l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme », et compagnie. Vous disposez maintenant d'un vrai vocabulaire pour éviter ces formulations fallacieuses.

✎ **En pratique** ✎

- Croissances comparées : On n'a pas multiplié les énoncés, par exemple, le cas $x \to -\infty$ pour des puissance entières se déduit de ce qui précède avec le changement de variable $X = -x$, et les puissances négatives se déduisent de $f^{-\alpha} = \frac{1}{f^\alpha}$. A vous de tracer mentalement les fonctions et de suivre les idées générales.
  Entrainez-vous à comparer de tête les fonctions suivantes :

  1. $x^{-\frac{1}{3}}$ et $\ln(x)$ en $x \to 0^+$. **2.** $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{\ln(x)}$ en 0^+. **3.** x^3 et $e^{-\frac{x}{3}}$ en $x \to -\infty$.
  4. $x\ln x$ et $\sqrt{x}$ en $+\infty$. **5.** x^2 et $\ln(x)e^x$ en $x \to +\infty$.

  Attention, comparer de telles fonctions ne relèvent pas toujours de la croissance comparée, quand les limites ne sont pas les mêmes (autrement dit quand les quotients ne sont pas des formes indeterminées). Par exemple, comparer de tête :

  1. $x^{\frac{1}{3}}$ et $\ln(x)$ en $x \to 0^+$. **2.** $\sqrt{x}$ et e^{-2x} en $+\infty$. **3.** $\frac{1}{x}$ et $e^{-\frac{x}{3}}$ en $x \to -\infty$.

- Pour les règles sur les monômes, ayez en tête les comparaisons suivantes, écrites « à la physicienne » :
  $$\sqrt{x} \ll x \ll x^2 \text{ lorsque } x \to +\infty \quad \text{et} \quad x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \text{ lorsque } x \to 0.$$
  Ces notations ne sont bien sûr PAS VALIDES en maths, mais leur utilisation dans d'autres matières prend désormais un sens rigoureux : il faut effectuer un quotient et amener une notion de limite.
- N'oubliez pas que les puissances sont des exponentielles, puisque
  $$\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x\ln(a)}.$$
  Ainsi, ces croissances comparées inclus des comparaisons de fonctions puissances.

Proposition 9 - Règles de calculs pour les relations de comparaison. Les régles de calculs se déduisent des règles sur les inégalités et les limites :

1. Si $f_1 \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$. Pareil avec $o(\cdot)$.
2. Si $f_1 \underset{x\to a}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_2(x))$ alors $(f_1f_2)(x) \underset{x\to a}{=} O((g_1g_2)(x))$.
   Avec un $o(\cdot)$ dans une des deux hypothèses, on obtient un $o(\cdot)$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$. Pareil avec $o(\cdot)$.
4. (Les comparaisons sont transitives) : si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.
   Avec un $o(\cdot)$ dans une des deux hypothèses, on obtient un $o(\cdot)$.

Proposition 10 - Règles de calculs pour les équivalences. Dans ce qui suit, a et b désignent ou bien des réels, ou bien $\{\pm\infty\}$.
Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1f_2 \underset{a}{\sim} g_1g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.
En particulier si $f \underset{a}{\sim} g$, on a $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

La composition à droite n'est rien d'autre qu'un changement de variable :

Exemple 11 - Un équivalent déjà vu. Montrer que $\sin(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$.

Notez qu'il n'y a pas de règles simple pour la somme ou la composition à droite !

Exemple 12 - Une composée qui ne marche pas. On a $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2+x$, mais a-t-on $e^{x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2+x}$?

Les exemples suivants sont essentiels pour la suite du chapitre :

Exemple 13 - Le cas d'une limite finie.

- Si f est définie et continue en a, avec $f(a) \neq 0$, on a $f \underset{a}{\sim} f(a)$.
- Si f est définie et dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors on a $f(a+h)-f(a) \underset{h\to 0}{\sim} hf'(a)$.

Exemple 14 - Une fraction rationnelle. On appelle fraction rationelle une fonction de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes. Donner un équivalent en $+\infty$ d'une telle fonction à partir de quantités pertinentes que vous introduirez.

On distingue en fait deux type d'analyse asymptotique : les « points réguliers », où les quantités ont des limites, et les « points singuliers » (en particulier $\pm\infty$), où les fonctions sont « ce qu'elles sont ». Voici une liste d'équivalents à connaître pour la première catégorie. La plupart vont resurgir dans la suite du chapitre.

Exemple 15 - Les équivalents à savoir. Complétez la liste suivante :

1. $\sin x \underset{0}{\sim}$	**2.** $\cos x \underset{0}{\sim}$	**3.** $\tan x \underset{0}{\sim}$	**4.** $\cos x - 1 \underset{0}{\sim}$	**5.** $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim}$
6. $\operatorname{ch} x \underset{0}{\sim}$	**7.** $e^x \underset{0}{\sim}$	**8.** $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$	**9.** $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$	**10.** $\ln x \underset{1}{\sim}$
11. $\operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim}$	**12.** $\operatorname{Arccos} x \underset{0}{\sim}$	**13.** $\operatorname{Arccos} x - \frac{\pi}{2} \underset{0}{\sim}$	**14.** $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim}$	

✖ **ATTENTION !** ✖ Ne cherchez pas une formule comme ci-dessus pour un équivalent de $\ln(x)$ en 0 : le logarithme y est « ce qu'il est ».

Exemple 16 - Applications au calul de limites. A l'aide d'équivalents, déterminez

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\operatorname{Arcsin}(x)}{\tan^2 x}.$$

Le résultat suivant est une version améliorée du théorème d'encadrement :

Proposition 17 - Equivalent par encadrement. Soit f, g et h trois fonctions telles que dans un voisinage de a, on ait

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition 18 - Conservation des propriétés. Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Alors

- Si f admet une limite en a, alors g aussi, et la limite et la même.
- Si f est strictement positive (respectivement, strictement négative) dans un voisinage de a, alors g aussi.

✎ **En pratique** ✎ Le premier point sert à déterminer des limites, mais aussi à vérifier un équivalent : si vous démontrez un équivalent du genre $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ mais que f et g n'ont pas la même limite en a, alors vous savez que vous vous êtes trompés.
Le deuxième point vous permet de donner le signe d'une fonction *dans une voisinage de a*. C'est un résultat très subtil car qualitatif : en pratique on ne sait pas exactement à partir de quelle valeurs la fonction g est du même signe que f, voir l'exemple suivant.

Exemple 19 - Une décroissance « à l'infini ». Soit f définie sur par $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x-1+\cos x}{2x^2+3}.$$

Donner un équivalent de f' en $+\infty$, et en déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante et positive sur $[x_0, +\infty[$.

2 Développements limités

2.1 Les DL : des approximations locales

Dans cette section, on suppose que $a \in \mathbb{R}$. L'idée essentielle d'un développement limité en a est d'approcher une fonction f par une fonction polynomiale qui va le mieux « coller » à f près du point a. C'est l'extension naturelle de la notion de tangente à une courbe en un point (où le polynôme est de degré 1) et de l'approximation affine associée, voir chapitre 1.

Définition 20 - Développement limité en un point a. On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ admet un développement limité en a (ou : « au voisinage de a) à l'ordre n lorsqu'il existe des copefficients $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

✎ **En pratique** ✎ De manière équivalente, en posant $h = x - a$, la formule ci-dessus peut se réécrire

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + o(h^n).$$

Ainsi, les DL de f en a et celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0 se déduisent l'un l'autre. Habituez-vos aux deux formes, mais ne les mélangez pas !

Remarque 21 - Reste et partie régulière. La partie $a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$ s'appelle la *partie régulière* du DL, tandis que le terme $o((x-a)^n)$ s'appelle le *reste*.
Remarquer que les termes successifs de la partie réglière sont de **plus en plus petits** lorsque x est proche de a, tandis que le reste est plus petit que tout ces termes !

Avan de présenter une stratégie générale pour trouver des DL, voici deux DL « manuels » :

Exemple 22 - Deux DL.

- Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto 4 - 3x + 5x^2 + x^2 \sin x + x^3 e^x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, déterminer le DL à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On pourra se souvenir dans quelle formule *essentielle* on a vu la quantité $\frac{1}{1-x}$.

Définition 23 - Unicité d'un DL. Si f admet un DL à l'ordre n en a, celui-ci est unique.

Proposition 24 - Parité et coefficients. Si une fonction paire (resp. impaire) admet un DL à l'ordre n en 0, celui-ci ne contient que des termes de puissances paire (resp. impaire).

Proposition 25 - DL et dérivabilité. Si f admet un DL à l'ordre 1 en a, alors f est dérivable en a.

Proposition 26 - Troncature d'un DL (qui peut le plus peut le moins). Si une fonction admet un DL à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors pour tout entier $0 \leqslant p \leqslant n$, la fonction admet aussi un DL à l'ordre p en a, obtenu en « tronquant » le DL à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$

Exemple 27 - Deux DL. Donner le DL à l'ordre 1 des deux fonctions de l'exemple 22.

✎ **En pratique** ✎ Technique de la mise en facteur du terme dominant :
Soit une fonction admettant un DL non nul à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

avec un des coefficients $(a_k)_{k=0,\ldots,n}$ non nuls. Soit

$$p = \min\{k \in [\![0\,,n]\!]\,, a_k \neq 0\}$$

le plus petit indice dont le coefficient associé est non nul. Alors on peut mettre en facteur le premier terme non nul du DL :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to a}{=} (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})\right), \\ &\underset{h \to 0}{=} h^p \left(a_p + a_{p+1}h + \ldots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p})\right), \quad \text{avec } h = x - a. \end{aligned}$$

Cette écriture permet de déduire de nombreuses informations sur f, en particulier que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{\sim} a_p h^p,$$

ainsi on peut lire le signe de f dans un voisinage de a selon celui de a_p et de la parité de p. On peut également donner un équivalent de $f(a+h) - a_p h^p$ en 0 s'il existe un autre coefficient non nul dand le DL.

Exemple 28 - Deux DL. On donne le DL suivant à l'ordre 5, en 0 :

$$\sin x \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Mettre en facteur le terme dominant dans le DL à l'ordre 5 de $x \mapsto \sin x - x$ en 0. .

2.2 Trouver et manipuler des DL

Commençons par les règles de calculs :

Proposition 29 - Somme et produit de DL. Soient f et g deux fonctions admettant un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o(x^n).$$

- On peut ajouter les deux DL : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o(x^n).$$

- On peut multiplier les deux DL, en négligeant les termes d'ordre élevés apparaissant dans le produit :

$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n).$$

où $T_n(P_nQ_n)$ est la troncature à l'ordre n du produit P_nQ_n.

✎ **En pratique** ✎ Dans la proposition, on demande aux DL des fonctions f et g d'être du même ordre. N'oublions pas que “qui peut le plus peut le moins”, ainsi, on commencera par négliger les termes d'ordres trop elevés avant de faire la some ou le produit. Après avoir fait le produit, on négligera encore une fois les termes d'ordre trop élévé. Entrainez-vous sur les exemples suivants.

Exemple 30 - Somme et produit de DL. On donne les DL suivants en 0 :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donner les DLs à l'ordre 2 des fonctions $f + g$ et $f \times g$. On pensera à mettre les DL sous forme normalisée si possible.

✎ **En pratique** ✎ La forme normalisée permet d'anticiper l'ordre des termes d'un DL, et donc d'éviter trop de calculs. Voir l'exemple suivant

Exemple 31 - Anticiper un produit. Soient f et g deux fonctions qui admettent les DL suivants :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 - x^4 + x^5 + 3x^6 + o(x^6) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} 2x^3 - 6x^4 + 13x^6 + o(x^6).$$

Donner le DL du produit, à l'ordre 5, puis à l'ordre 6.

✖ **Attention !** ✖ En général, pour une somme ou un produit, il est impossible de donner le DL à des ordres plus élevés que ceux apparaissant dans les DLs d'origine. Par exemple, on a

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

mais on ne peut pas déduire le DL du produit $\cos x \times e^x$ à l'ordre 2 ou 3. La raison est que le $o(x)$ du DL de $\cos x$ cache des termes :

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Là, on peut faire le produit pour obtenir le DL à l'ordre 2.

✎ **En pratique** ✎ Toutes ces règles s'adaptent bien sûr pour des DL en d'autres points. L'important quand on manipule plusieurs DL est que tout ceux-ci aient lieu au même point.

Proposition 32 - DL de l'inverse. Soit f qui admet un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + xa_1 + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Supposons que $a_0 \neq 0$, c'est-à-dire $f(0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de 0, et admet un DL à l'ordre n en 0, qui s'obtient en mettant a_0 en facteur, et en utilisant le DL de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

✎ **En pratique** ✎ Pour faire le DL d'un quotient, on utilise les méthodes des DL de l'inverse et du produit, voir exemple suivant.

Exemple 33 - DL d'un quotient. On donne

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Donner le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ puis de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

La technique de mise en facteur peut être intéressante même lorsque le numérateur s'annule. Par exemple, on sait que $\frac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$. Montrer à l'aide d'un développement limité que $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ admet une limite en 0.

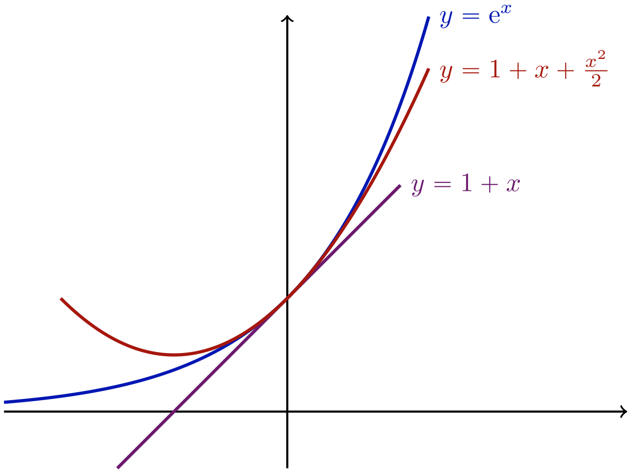
Remarque 34 - Composer des DL, Part 1. La technique précédente est caractéristique d'une composition de DL. On n'énoncera pas de résultat général, peu digeste, mais on s'entrainera sur des exemples lorsque nous aurons plus de DLs à notre disposition.

Théorème 35 - Formule de Taylor-Young. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et $a \in I$. Alors f admet un DL à l'ordre n en a, et celui-ci est donné par

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(0) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &\underset{h\to 0}{=} f(0) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n), \quad \text{avec } h = x - a. \end{aligned}$$

Ce théoème essentiel est l'extension de l'existence d'une tangente pour une fonction dérivable : la meilleure approximation d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ en un point a par un polynôme de degré n est donée par la partie régulière du DL, fournie par la formule de Taylor-Young.

Ci-contre la fonction $x \mapsto e^x$, et son approximation par les parties régulières de ses DL en 0 $x \mapsto 1 + x$ (ordre 1) et $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (ordre 2). Ces deux fonctions approchent bien la fonction en 0, mais n'ont rien à voir lorsque l'on s'éloigne de 0.



✎ **En pratique** ✎ Cette formule permet de trouver le DL n'importe quelle fonction assez régulière... à condition de connaître ses dérivées successives, ce qui peut être un calcul fastidieux ! Nous verrons bientôt comment manipuler des DL pour en trouver de nouveaux.

Exemple 36 - Deux DL. Donner le DL à l'ordre n des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^x$ en 0.
- $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

Etablir également les DL de $x \mapsto \sin x$ en 0 aux ordres $2n+1$ puis $2n+2$.

Le catalogue des DLs connus (et à connaître) s'étoffe. Nous ferons un point récapitulatif en fin de chapitre

Proposition 37 - Primitivation de DL. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable et $a \in I$. Supposons que la dérivée f' admette un DL à l'ordre n en a :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_x (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors f admet un DL à l'ordre $n+1$ en a, qui est obtenu en primitivant le DL de f', sans oublier d'ajouter $f(a)$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 38 - Encore deux DL. Donner les DL en 0 à l'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ à partir de ceux de leurs dérivées.

Pour dériver un DL d'ordre n, il suffit que la fonction soit de classe $\mathscr{C}^n$, sinon cela peut ne pas fonctionner. Sans hypothèses, on évitera. En pratique, cela ne sert pas beaucoup.

Proposition 39 - Primitivation de DL. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction qui admet un DL en a, et g qui admet en DL en $f(a)$. Alors on peut composer les DLs, en négligeant les termes d'ordres trop élevés comme pour les produits (voir mise en pratique).

Exemple 40 - Exemples de composition de DL. On rappelle que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donner le DL de $x \mapsto \ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 3.
Donner également les DL de $x \mapsto e^{\sin x}$ et $x \mapsto e^{\cos x}$ en 0 à partir de celui de $x \mapsto e^x$. Notez que le deuxième n'entre pas vraiment dans le cadre du théorème car $\cos(0) = 1$, mais on arrive à s'y ramener en utilisant les propriétés de l'exponentielles.

2.3 Développements limités usuels

	Fonction $f(x)$	DL (symbole Σ)	DL explicite
1	e^x	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$
3	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n)$
4	$\sin x$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
5	$\operatorname{ch} x$	Comme $\cos x$, sans $(-1)^k$	
6	$\operatorname{sh} x$	Comme $\sin x$, sans $(-1)^k$	
7	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
8	$\operatorname{Arctan} x$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
9	$\tan x$	pas de forme concise	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
10	$(1+x)^\alpha$	dur	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$.
11	$\sqrt{1+x}$	dur	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, avec $a_n \neq 0$.

✎ **En pratique** ✎ Les deux premières lignes sont incontournables, elles permettent de retrouver en outre le reste du tableau. Les lignes 3 et 4 sont elles-aussi essentielles.
Pour les deux dernières lignes, on pourra se contenter des premiers termes.

Concernant la forme général du DL de $\sqrt{1+x}$, on peut aboutir à

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} x^k + o(x^n).$$

2.4 Quelques applications des DL

Calculs des limites Les DLs sont des outils puissants pour lever l'indetermination lors d'un calcul de limite. Il suffit de faire DL des quantités qui causent l'indertermination, puis de lire le résultat. Il y a un aspect pratique : il faudra savoir faire des développements limités aux ordres qui vont bien pour lever l'indetermination sans aller trop loin sous peine de calculs trop lourds.

✎ **En pratique** ✎ On retiendra en particulier les stratégies suivantes (qui ne sont pas garanties !) :

- Pour déterminer la limite d'un quotient, ou cherchera un équivalent du numérateur et du dénominateur séparément (potentiellement à l'aide de DLs).
- Pour déterminer la limite d'une somme ou d'une différence on cherchera des DL de chaque terme séparément, en imaginant à l'avance les termes qui ne vont pas se simplifier pour prévoir l'ordre des DL à effectuer.
- Pour effectuer le DL d'une fonction à une puissance variable, on passera la fonction sous forme exponentielle.

Exemple 41 - Calculez les limites suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1-\cos^3 x}{x^2}$ en 0. **2.** $x \mapsto \frac{(x+\frac{1}{3}x^3)\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\ln^5(1+x)}$ en 0. **3.** $x \mapsto \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ en 0. **4.** $x \mapsto \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$ en $+\infty$.

✎ **En pratique** ✎ Comme on le voit sur le dernier exemple, on évitera des raisonnement du type « 1^∞ » pour des formes indeterminés à base de puissance, et on passera les puissances sous forme exponentielle.

Allure locale d'une courbe Etant donnée une fonction $f : I \mapsto$ ayant un DL en a de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a),$$

on sait que $\mathscr{C}_f$ a une tangente en a d'équation

$$y = a_0 + a_1(x-a).$$

On voudrait savoir la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente (dans un voisinage de a). Le résultat suivant donne une méthode :

Proposition 42 - Position relative d'une courbe et de sa tangente. Suposons qu'une fonction $f : I \mapsto$ admette un DL en a de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p), \quad \text{avec} \quad p \geqslant 2 \quad \text{et} \quad a_p \neq 0. \tag{1}$$

Alors :

- Si p est impaire, $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en a. Il s'agit d'un point d'inflexion.
- Si p est paire, $\mathscr{C}_f$ ne traverse pas sa tangente en a. Leurs positions relatives dépend du signe de a_p.

✎ **En pratique** ✎ Pour déterminer l'équation de la tangente, on calcule $f(a)$ et $f'(a)$. Le coefficient a_p est la première dérivée d'ordre supérieur de f en a qui est non nulle.

Exemple 43 - Les exemples types. vérifiez que la courbe de la fonction sinus traverse sa tangente en 0, tandis que la courbe de la fonction exponentielle reste au dessus.

Proposition 44 - Nature d'un point critique. Soit $f = I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point a à l'intérieur de I. Alors

- Si a est un point critique de f, alors $f'(a) = 0$. Il peut s'agir d'un point d'inflexion ou d'un extremum local.
- Supposons de plus que f a un DL de la forme (1). Alors :
  - × Si p est impair, il s'agit d'un point d'inflexion.
  - × Si p est pair, alors lorsque $a_p > 0$, on a un minimum local en a, et lorsque $a_p < 0$, on a un maximum local en a.

✎ **En pratique** ✎ En pratique, si $f'(a) = 0$, on peut retenir la condition nécessaire suivante :

- Si $f''(a) > 0$, f a un minimum local en a.
- Si $f''(a) < 0$, f a un maximum local en a.

Par contre si $f''(a) = 0$, il faut être pret à monter aux ordres suivants pour déterminer la nature du point critique.

Exemple 45 - Un polynôme. Soif $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$. Trouver les points critiques de f et déterminer leurs natures.

Exemple 46 - Un ordre élevé. Soif $f : x \mapsto \operatorname{ch}(1-\cos x) + \cos(1-\operatorname{ch} x) - 2$. Vérifier que f a un point critique en 0, puis en déterminer la nature.

Toute les fonctions n'admettent pas un DL non nul, même si elles sont régulières, comme le montre l'exemple suivant, à la fois très marginal et très classique :

Exemple 47 - Une fonction « plate ». Soit f défini sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, et prolongé sur $\mathbb{R}$ par la fonction nulle. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Allure asymptotique d'une courbe L'allure d'une courbe en $+\infty$ ou $-\infty$ est une question délicate car il n'y a pas toujours de réponse. On peut essayer de comparer la fonction à des droites, et le résultat suivant donne une stratégie :

Proposition 48 - Asymptote oblique. Soit $f = I \to \mathbb{R}$, définie au voisinage de $+\infty$, telle que l'on ait :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+o(1),$$

alors $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax+b$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. De plus, la position relative de cette droite et de $\mathscr{C}_f$ s'obtient en étudiant le signe de $f(x)-ax-b$ au voisinage de $+\infty$.
On a un résultat similaire au voisinage de $-\infty$.

Il ne s'agit pas à proprement parlé d'un DL, mais il sera courant d'utiliser des DL (par exemple en faisant apparaître la quantité $\frac{1}{x}$) pour obtenir le développement asymptotique ci-dessus.

Exemple 49 - Un développement asymptotique. Soit f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Trouver a et b tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+o(1)$, puis étudier l'allure asymptotique de la courbe de f en $+\infty$. Même question pour g défini sur $]1,+\infty[$par $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

3 Relation de comparaison pour les suites

N'oubliez pas que les suites sont des cas particulier de fonctions. Toute la première section va s'adapter facilement aux cas des suites. Dans tout ce qui suit, on suppose que les suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Les trois définitions du cas réel s'adaptent facilement :

Définition 50 - Relation de comparaison. Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- (Dominé par). On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n),$$
- (Négligeable devant). On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On note
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n),$$
- (Equivalent à). On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On note
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

On sera moins acharné à préciser « $n \to +\infty$ », car, sauf ambigüité, il n'y a pas d'autres possibilité pour l'étude asymptotique d'une suite.

Les résultats suivants sont redondants avec la section précédante :

Proposition 51 - Relation de comparaison. Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- (Produit et quotient : aurorisé). Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.
- (Puissance FIXE : autorisée). Si $p \in \mathbb{Z}$ et $u_n \sim v_n$, alors $u_n^p \sim v_n^p$.
Si u_n et v_n sont à termes strictement positifs, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

✖ **Attention !** ✖ Comme pour les fonctions, tout autre règle n'a pas lieu d'être. En particulier, sans une analyse préalable,

- On ne fait pas la somme ou la différence d'équivalent.
- On ne compose pas des équivalents.
- Attention aux puissances non fixes (voir exemple ci-dessus).

Exemple 52 - Quelques équivalents . Donner un équivalent des suites suivantes :

1. $u_n = \binom{n}{3}$. **2.** $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. **3.** $u_n = \ln(2^n + n^2)$.

Exemple 53 - Les pièges ultra classiques . Vous aurez été prévenus :

1. Donner la limite de $(n + \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que $n^2 \sim n^2 + n$. A-t-on cependant $e^{n^2} \sim e^{n^2+n}$?
   Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Vous voulez inventez une règle pour un équivalent ? Revenez à la définition ! !

Exemple 54 - Composez avec le log . Soient (u_n) et (v_n) deux suites tellles que $u_n \sim v_n$, et qui tendent toutes deux vers $+\infty$. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. Donner un résultat similaire pour des suites qui tendent vers 0 (indice : pas besoin de tout refaire).
Montrer que cette règle ne s'applique pas pour des suites qui tendent vers 1, en notant que si (u_n) tend vers 1, alors $\ln(u_n) \sim u_n - 1$
En résumé : si $u_n \sim v_n$, et si les suites tendent vers $\ell \in [0, +\infty]\backslash\{1\}$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. Ce résultat n'est pas utilisable, il faudra le remontrer !

Tous les résultats vus dans la section précédente s'adapte ! Soyez-prêt, cela ne fait pas deux fois plus de choses à savoir mais deux fois moins ! Par exemple :

Proposition 55 - Liste de résultats redondants.

- $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.
- $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, et que u_n a un signe constant à parti d'un certain rang, alors v_n aussi (et le signe est le même).
- Si $u_n \sim v_n$, alors u_n admet une limite si et seulement si v_n admet une limite, et les limites sont alors les mêmes. En particulier pour un réel $\ell \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff u_n \sim \ell.$$

Il y a aussi les règles de croissances comparées :

Proposition 56 - Croissances comparées pour les suites . Soient $0 < \alpha < \delta$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, on a

$$\ln^\beta n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(n^\delta), \quad n^\delta = o(e^{\gamma n}).$$

Exemple 57 - En attendant les séries . Montrer que $\frac{\ln n}{n^2} = o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$.