# Chapitre 15 - Géométrie du plan

## 1 Différents modes de repérage

**Définition 1 - Repère cartésien.** On appelle repère cartésien du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O$ est un point du plan, et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
Le point $O$ est appelé *origine du repère*, la droite passant par $O$ orientée par le vecteur $\vec{i}$ est appelée *l'axe des abscisses*, et celle passant par $O$ orientée par le vecteur $\vec{j}$ *l'axe des ordonnées.*

**Définition 2 - Coordonnées cartésiennes.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

De même, un point $M$ étant identifié au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple $(x, y)$ sont les coordonnées cartésiennes de $M$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La valeur $x$ est l'abscisse de $M$ et la valeur $y$ l'ordonnée de $M$ (sous-entendu : dans le repère...). On peut noter $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M = (x, y)$.

**Proposition 3 - Unicité des coordonnées cartésiennes.** Dans un repère fixé du plan, les coordoonnées cartésiennes sont uniques.

**Exemple 4 - Changement de repère cartésien.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et le point $A = (1, -3)$, ainsi que les vecteurs $\vec{u} = (-1, 1)$ et $\vec{v} = (2, 1)$. Soit un point $M$ de coordonnées $(x, y)$.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et donner les coordonnées de $M$ dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Remarque 5 - Changement de repère cartésien.** On aura bientôt des méthodes puissantes issues de l'algèbre linéaire pour changer de bases. .

On rappelle qu'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthonormal direct lorsque l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ vaut $\frac{\pi}{2}$, et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Les notions d'orthogonalité et de norme euclidienne sont celles des petites classes, nous les exprimerons bientôt avec le produit scalaire.

**Définition-Proposition 6 - Coordonnées polaires : repère.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle repaire polaire associé à $\theta$ le repère $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, où les vecteurs $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sont définis par :

$$\begin{cases} u_r &= \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \\ u_\theta &= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}. \end{cases}$$

Il s'agit d'un repère orthonormal direct.

Le repère $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est déduit du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ après une rotation centrée en $O$ d'angle $\theta$.

**Proposition 7 - Coordonnées polaires : vecteur radial.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Alors,

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}.$$

Le couple $(r, \theta)$ sont des coordonnées polaires de $M$.

**Remarque 8 - Lien avec la géométrie.** Le nombre $r$ est la distance à l'origine de $M$, il est unique. Le nombre $\theta$ est unique modulo $2\pi$, il représente, lorsque $M \neq O$, l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur $\overrightarrow{i}$.
Quel lien faites-vous avec les complexes ?
Notez enfin que dans certaines circonstances on peut définir ces coordoonées avec $r \in \mathbb{R}$, ce qui offre la possibilité d'avoir $r < 0$. Utilisez $\cos\pi = -1$ !

Le résultat suivant doit vous rappeler le chapitre sur les nombres complexes :

**Théorème 9 - Lien entre les coordonnées polaires et cartésiennes.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $M \in \mathcal{P}$ NON NUL de coordonnées carésiennes $(x, y)$ et de coordonées polaires $(r, \theta)$.

**(i) Expressions des coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires :**

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

**(ii) Expressions des coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes :**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

**Exemple 10 - Changer de coordonnées.**

1. Donner les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(2, -\sqrt{12})$.
2. Donner les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées polaires $(5\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$.

**Exemple 11 - Une seule formule pour $\theta$.** Exprimer $\theta$ en grâce à la fonction Arctan en distinguant deux cas.

# 2 Produit scalaire

**Définition-Proposition 12 - Norme euclidienne.** Soit le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathcal{P}$, de coordonnées cartésiennes $(x, y)$. Alors on définit la norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$ comme

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, il représante la distance entre l'origine et un point $M$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ .

**Définition 13 - Produit scalaire.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 \quad \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}.$$

**Remarque 14 - Lien avec la géométrie.**

- (Lien avec la norme euclidienne). On a la formule
$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$
- Le produit scalaire de deux vecteurs et le produit des mesures algébriques (i.e. signées) de leurs projetés orthogonaux sur le support de l'un d'entre eux. En d'autres termes : soient 3 points $O$, $A$ et $B$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Soit $H$ le projeté orthogonal de $B$ sur la droite $(OA)$. Alors, en orientant cette droite dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a $\overline{OA} = \|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{OH}$, d'où
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}.$$

**Définition 15 - Bilinéarité et symétrie.** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan ainsi que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est :

- Bilinéaire : $\begin{cases} \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{w} + \beta\vec{v} \cdot \vec{w} \end{cases}$.
- Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Ces formules en apparence indigestes conceptualisent des règlent de calculs que vous connaissez déjà : commutativité et distributivité. Familiarisez-vous avec leur forme car nous les reverrons dans un cadre plus général.

**Théorème 16 - Expression dans une base orthonormée.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées cartésiennes respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ dans un repère cartésien orthonormé. Alors on a
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Encore une fois, la valeur du produit scalaire ne dépend pas du repère choisi, tant qu'il est orthonormé ! C'est une quantité *géométrique*.

**Exemple 17 - Calculer des produits scalaires.** Calculer $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Théorème 18 - Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$
avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Vous vous souvenez de l'inégalité triangulaire pour les complexes ? La formule suivante doit vous renforcer dans l'idée que la norme d'une somme n'est pas la somme des normes, avec une vision géométrique.

**Proposition 19 - Identité remarquable et polaisation.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$
On déduit la formule de *polarisation*
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

✎ **En pratique** ✎ La formule de polarisation permet de trouver le produit scalaire à partir de normes. Pensez que ces formules peuvent s'utiliser avec $\vec{u} - \vec{v}$ à la place de $\vec{u} + \vec{v}$

**Proposition 20 - Orthogonalité et produit scalaire.** Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

De nombreuses applications, en particuliers dans la section sur les droites du plan, vont arriver.

**Exemple 21 - Pensez au milieu.** Soient les points $A$ et $B$, de coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 122$

# 3 Produit mixte dans le plan

**Définition 22 - Produit mixte.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit mixte entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $[\vec{u}, \vec{v}]$ défini par

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 \quad \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}.$$

**Remarque 23 - Lien avec la géométrie : aire d'un parallélogramme.** Etant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre $|[\vec{u}, \vec{v}]|$ représente l'aire du paralélogramme engendré par ces vecteurs, avec la convention que cette aire est nulle si les vecteurs sont alignés.
De plus, le signe de $[\vec{u}, \vec{v}]$ indique une orientation : le parallélogramme est direct lorsque $[\vec{u}, \vec{v}] \geqslant 0$ et indirect sinon.

**Définition 24 - Bilinéarité et antisymétrie.** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan ainsi que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Le produit mixte sur $\mathbb{R}^2$ est :

- Bilinéaire : $\begin{cases} [\vec{u}, (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}] + \beta[\vec{u}, \vec{w}] \\ [(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}), \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}] \end{cases}$
- Antisymétrique : $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$

**Théorème 25 - Expression dans une base orthonormée directe.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées cartésiennes respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ dans un repère cartésien orthonormé direct. Alors on a

$$[\vec{u}, \vec{v}] = xy' - x'y.$$

Quel objet déjà aperçu cela vous évoque-t-il ?

**Proposition 26 - Alignement et produit mixte.** Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alignés si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

**Exemple 27 - Avec le produit mixte.** Soient les points $A$ et $B$, de coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $A$, $B$ et $M$ sont alignés.

**Exemple 28 - Aire d'un triangle.** Montrer que l'aire d'un triangle $ABC$ est donnée par $\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.

# 4 Droites du plan

## 4.1 Différentes représentations

On se place jusqu'à la fin du chapitre dans un repère orthonormal direct.
On rappelle qu'une droite du plan est un ensemble de points, tous alignés.

**Définition 29 - Vecteur directeur et vecteur normal.** On appelle vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{AB}$, où $A$ et $B$ sont deux points quelconques de $\mathcal{D}$.
On appelle vecteur normal d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

**Notation 30 - De nombreux points de vue, de nombreuses notations.** Une droite est déterminée par la donnée d'un des points suivants :

- Un point $A$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$. On note $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$ où $\text{Vect}(\vec{u})$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ (on parle de droite vectorielle, cette notion reviendra bientôt en force).
- Deux points distincts $A$ et $B$. On note alors $\mathcal{D} = (AB)$.
- Un point $A$ et un vecteur non nul $\vec{n}$ normal à la droite. On note $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{n})^{\perp}$, où $\text{Vect}(\vec{n})^{\perp}$ désigne l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$. Il s'agit de la droite vectorielle $\text{Vect}(\vec{u})$ avec les notations précédantes.

**Proposition 31 - Paramétrage cartésien d'une droite.** Soit la droite $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Alors un paramétrage cartésien de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des réels}$$

Autrement dit, un point $(x, y) \in \mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que $x = x_0 + \alpha t$ et $y = y_0 + \beta t$. Attention, le choix du point $A$ et du vecteur directeur $\vec{u}$ influe sur le paramétrage.

**Exemple 32 - Représentation paramétrique.**

1. Soient $A = (2, 3)$ et $B = (8, -5)$. Donner une représentation paramétrique de la droite $(AB)$.
2. Que dire de la droite paramétrée par le sysème $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t, \\ y = 5 + t, \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, par rapport à $(AB)$ ?

**Proposition 33 - Equation cartésienne depuis un vecteur directeur.** Soit la droite $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Alors une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est donnée par $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = 0$ :

$$\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0.$$

**Remarque 34**

- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a donc pour vecteur directeur le vecteur $(-b, a)$.
- Il est souvent pratique d'utiliser la caractérisation $[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = 0$.

**Exemple 35 - Représentation cartésienne.**

1. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A = (2, 3)$ et $B = (8, -5)$.
2. Retrouver cette équation directement à partir de la représentation paramétrique trouvée à l'exemple 32

**Proposition 36 - Equation cartésienne depuis un vecteur normal.** Soit la droite $\mathcal{D}$ passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$ c'est-à-dire $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{n})^{\perp}$, avec $A = (x_0, y_0)$ et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$. Alors une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est donnée $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ :

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0.$$

**Remarque 37**

- Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a donc pour vecteur normal le vecteur $(a, b)$.
- Il est souvent pratique d'utiliser la caractérisation $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

**Exemple 38 - Représentation cartésienne.**

1. Donner une éqation cartésienne de la droite passant par $A = (2, 3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n} = (8, 6)$.
2. Retrouver cette équation directement à partir de la représentation paramétrique trouvée à l'exemple 32

**Exemple 39 - Parallèles ou perpendiculaires ?.**

1. Parmi les droites suivantes, dont on donne une représentation, dire lesquelles sont parallèles à $\mathcal{D}_1$ :

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 6y + 3 = 0, \quad \mathcal{D}_2 : -x + 3y + 2 = 0, \quad \mathcal{D}_3 : 3x - 5y + 4 = 0, \quad \mathcal{D}_4 : \begin{cases} x = 4 + 9t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Parmi les droites suivantes, dont on donne une représentation, dire lesquelles sont perpendicuaires à $\mathcal{D}_1$ :

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 6y + 3 = 0, \quad \mathcal{D}_2 : -9x - 3y + 5 = 0, \quad \mathcal{D}_3 : 5x + \frac{3}{2}y + 6 = 0.$$

**Application 40 - Régionnement du plan.** On considère un point $A \in \mathcal{P}$ du plan et un vecteur $\vec{n}$ non nul. Représenter les trois régions suivantes du plan :

- L'ensemble des points $M$ tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
- L'ensemble des points $M$ tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} > 0$.
- L'ensemble des points $M$ tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} < 0$.

Quel lien y a-t-il avec le travail d'une force ?

**Application 41 - Lignes de niveau.**

1. On considère un point $A \in \mathcal{P}$ du plan et un vecteur $\vec{u}$ non nul. Soit la fonction de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$. Donner les lignes de niveau de $f$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan vérifiant $f(M) = cste$.
2. Même question avec la fonction $g : M \mapsto [\vec{u}, \overrightarrow{AM}]$.

## 4.2 Distance d'un point à une droite

**Définition-Proposition 42 - Projection ortogonale sur une droite.** Soit $M$ un point du plan, $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$ l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.
Ce point $H$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche du point $M$, au sens euclidien. La distance $HM$ est appelée la distance du point $M$ à la droite $\mathcal{D}$, on la note $d(M, \mathcal{D})$.

On a donc

$$d(M, \mathcal{D}) = \min_{A \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$$

Cette quantité, géométriquement facile à identifier (si on se souvient de Pythagore), ne se calcule pas directement, ce qui est typique d'un problème d'optimisation. Par contre on peut facilement calculer la quantité $d(M, \mathcal{D})$ avec le résultat suivant :

**Proposition 43 - Distance d'un point à une droite, version géométrique.** Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $A$, de vecteur directeur $\vec{u}$ et de vecteur normal $\vec{n}$.
Pour un point $M$ du plan, la distance de $M$ à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Ces formules se simplifient si vous avez choisi des vecteurs « normés », c'est-à-dire de norme 1. Mais au fait, comment normer un vecteur ?

**Proposition 44 - Distance d'un point à une droite, version cartésienne.** Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Pour un point $M = (x_0, y_0)$ du plan, la distance de $M$ à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ces formules couvrent le cas où $M \in \mathcal{D}$ pour lequel $d(M, \mathcal{D}) = 0$.

✎ **En pratique** ✎ Comment déterminer le projeté orthogonal $H$ de $M$ sur $\mathcal{D}$ ? On cherche d'abord un point $A \in \mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de norme 1. On a alors (clair sur un dessin) :

$$\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\vec{u} = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\right)\vec{u}.$$

Remarquez qu'une autre méthode « cartésienne » consiste à déterminer l'équation de $(HM)$, puisque $\vec{u}$ en est un vecteur directeur et qu'elle passe par $M$, puis à déterminer à la main $H = \mathcal{D} \cap (HM)$. Laissons cette méthode aux lycéens...

**Exemple 45 - Exemple de projection à une droite.** Déterminer la distance du point $M = (2, 3)$ à la droite passant par $A(5, 8)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (-1, 4)$. Déteminer la projection orthogonale de $M$ sur cette droite.

# 5 Cercles

On l'oublie souvent, mais un cercle possède un centre $A$ et un rayon $R$ : il s'agit de l'ensemble des points du plan $M$ tels que la distance au centre $AM$ vaut $R$. On rappelle, même si tout le monde le sait, que son aire vaut $\pi R^2$ et sa circonférence $2\pi R$.

**Proposition 46 - Equation cartésienne d'un cercle.** Le cercle de centre $A = (x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation cartésienne :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

On parle aussi d'équation normale, voire normalisée.

✎ **En pratique** ✎ Votre meilleur allié pour trouver une telle équation à partir d'une expression de degré 2 en $x$ et $y$ sera la mise sous forme canonique. Attention, toutes les équations de degré 2 ne conduisent pas à une équation de cercle ! Les autres *coniques* (ellipses et hyperboles, omniprésentes en astrophysique) ne sont pas au programme... de première année.

**Remarque 47 - Lien avec les complexes.** Pensez aussi à l'équation en complexes à l'aide des affixes : $|z - a| = R$, avec $a = x_0 + iy_0$ et $z = x + iy$.

**Exemple 48 - Equation d'un cercle.**

- Ecrire une équation cartésienne du cercle de centre $A = (1, 3)$ passant par le point $B = (4, 7)$. Donner les coordonnées de quatre points de ce cercle.
- Discuter en fonction du réel $k$ la nature de l'ensemble des points de coodonnées $(x, y)$ vérifiant

$$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 = k.$$

**Exemple 49 - Paramétrisation d'un cercle.** Donner un représentation paramétrique d'un cercle à l'aide de fonctions trigonométriques

**Proposition 50 - Equation cartésienne d'un cercle.** Etant donnés deux points $A$ et $B$ distincts, le cercle qui a pour diamètre le segment $[AB]$ est l'ensemble des points tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

**Exemple 51 - Equation d'une tangente.** Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $A = (x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$. Déterminer l'équation de la tangente en un point $M = (x_1, y_1) \in \mathscr{C}$.

Nous voilà prêt à déterminer des intersection de cercles et de droites, voir le TD.