

Chapitre 17 - Espaces vectoriels

Ce chapitre introduit la structure fondamentale d'*espace vectoriel* qui forme la base de l'algèbre linéaire. Dans tout ce chapitre \mathbb{K} désigne l'un des ensembles de nombres \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 - Espace vectoriel. Un \mathbb{K} -*espace vectoriel* ou *espace vectoriel sur \mathbb{K}* est un triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble et $+$ et \cdot des lois vérifiant les propriétés suivantes :

• **Loi d'addition interne « + » :**

(i) (*associativité de +*) pour tous $x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(ii) (*commutativité de +*) pour tous $x, y \in E$, $x + y = y + x$;

(iii) (*neutralité pour +*) il existe un élément de E , noté 0_E et nommé *vecteur nul de E* , tel que,

$$\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x ;$$

(iv) (*opposé pour +*) pour tout $x \in E$, il existe un élément de E , noté $-x$ et nommé *opposé de x* , tel que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0_E ;$$

• **Loi de multiplication externe « · » :**

(v) (*neutralité mixte*) pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$;

(vi) (*distributivité mixte 1*) pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(vii) (*distributivité mixte 2*) pour tout $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(viii) (*associativité mixte*) pour tout $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des *vecteurs* et les éléments de \mathbb{K} , qui agissent par l'intermédiaire de la loi externe \cdot sur ceux de E , des *scalaires*. La loi $+$ est appelée *addition* et la loi \cdot *multiplication par un scalaire*.

Remarque 2 Ce que l'on appelle « lois » sont en réalité des applications de $E \times E$ dans E (pour l'addition) et de $\mathbb{K} \times E$ dans E (pour la multiplication par un scalaire).

Les mathématiciens ont introduit la structure d'espace vectoriel, hermétique au premier abord, car ils ont remarqué que cette structure est omniprésente en mathématiques. Ainsi, en mener l'étude systématique s'est imposée.

On peut évidemment s'interroger sur l'origine de la terminologie d'« *espace vectoriel* » et de « *vecteurs* » dans un cadre aussi abstrait. La réponse étant que les règles de la définition précédentes sont exactement celles classiquement vérifiées par les vecteurs usuels du plan et de l'espace. Dorénavant, les vecteurs pourront désigner des objets aussi divers que des matrices, des fonctions ou des suites, que l'on pourra ainsi s'efforcer de visualiser géométriquement.

Remarque 3

- Un espace vectoriel E est nécessairement non vide, puisqu'il contient toujours le vecteur nul 0_E .
- On écrit la plupart du temps « λx » en lieu et place de « $\lambda \cdot x$ », pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs \vec{x} avec une flèche. En revanche, on utilise usuellement la notation plus légère sans flèche pour les vecteurs d'un espace vectoriel. Il faut donc être vigilant et veiller à ne pas confondre vecteurs et scalaires.
- Comme le suggère leurs notations, le vecteur nul 0_E et l'opposé $-x$ d'un vecteur x de E sont UNIQUES. En effet :
 - ★ si $0'_E$ désigne aussi un élément neutre pour l'addition, alors $0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$;

★ si x' désigne aussi un opposé de x pour $+$, alors

$$x' = x' + 0_E = x' + (x + (-x)) = (x' + x) + (-x) = 0_E + (-x) = -x.$$

- De façon générale, l'addition dans E jouit des mêmes propriétés que l'addition dans les ensembles classiques de nombres, e.g. \mathbb{Z} , \mathbb{R} et \mathbb{C} ; notamment, la règle de simplification suivante est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = x + z \implies y = z.$$

Théorème 4 - Règles de calcul dans un espace vectoriel. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- (i) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- (ii) Pour tout $x \in E$, $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans \mathbb{K} .

Démonstration. ... ■

✗ ATTENTION ! ✗ On veillera à ne pas confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel E avec 0 l'élément nul de l'ensemble des scalaires \mathbb{K} . 0_E est un vecteur tandis que 0 est un scalaire !

Exemple 5 $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, la multiplication classique \times dans \mathbb{K} étant assimilée à la loi externe « \cdot ».

Exemple 6 - Familles de scalaires. L'ensemble $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}^{n \text{ fois}}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, muni des lois

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

On retrouve ici le cadre des vecteurs du plan avec \mathbb{R}^2 et celui des vecteurs de l'espace avec \mathbb{R}^3 .
Par exemple, $(1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$ – les opérations se faisant coordonnées par coordonnées.

Notez que l'exemple précédent est un cas particulier d'un produit cartésien d'espaces vectoriels, mais cet exemple suffit amplement plutôt que de faire un énoncé général.

Exemple 7 - Matrices. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire.

Exemple 8 - Polynômes. $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour ses lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire. C'est aussi le cas de $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Proposition 9 - Espace vectoriel de fonctions. Soit X un ensemble non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. L'ensemble E^X des fonctions de X dans E , naturellement muni de ses règles d'additions et de multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.

Les deux exemples suivants tombent dans le cadre de cette proposition :

Exemple 10 - Fonctions et suites réelles.

- Pour tout intervalle I non vide, l'ensemble \mathbb{R}^I des fonctions de I dans \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel (il s'agit du théorème précédent avec $X = I$ et $E = \mathbb{R}$).
- On peut raffiner en montrant que $C^0(I, \mathbb{R})$ ou $C^1(I, \mathbb{R})$ sont aussi des espaces vectoriels. Nous aurons bientôt des outils pour éviter de vérifier tous les axiomes.
- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un réel (il s'agit du théorème précédent avec $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}$).
- L'exemple 7 est un aussi un cas particulier de la proposition précédente avec $X = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $E = \mathbb{K}$.

Exemple 11 Tout \mathbb{C} -espace vectoriel est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. En particulier, \mathbb{C} est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

En effet, si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, $\lambda \cdot x$ est défini pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in E$, donc en particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui justifie que l'on puisse considérer E comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, par restriction de l'ensemble des scalaires.

✗ ATTENTION ! ✗ Nous avons vu une longue liste d'ensembles qui sont des espaces vectoriels. Combien pouvez-vous en citer ?

Il y a un piège dangereux : il n'y a aucune raison qu'un espace vectoriel quelconque dispose d'un produit interne. Ainsi, même si les « vecteurs » ont perdu leur flèche, étant donné un \mathbb{K} espace vectoriel quelconque, et x et y deux éléments de E , on évitera de faire le produit xy , qui n'a aucune raison d'avoir un sens.

Bien entendu, certains espaces vectoriels possèdent un produit interne, mais ce sont des cas particuliers souvent différents les uns des autres.

Exemple 12 Les ensembles suivants du plan sont-ils des espaces vectoriels ?

- L'ensemble $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2), -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$.
- L'ensemble $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2), xy = 0\}$.
- Une droite de \mathbb{R}^2 ne passant pas par l'origine. Et si elle passe par l'origine ?

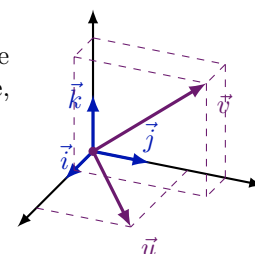
1.2 Combinaisons linéaires

Définition 13 - Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle *combinaison linéaire des vecteurs* x_1, \dots, x_n tout vecteur de E de la forme $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (les *coefficients* de la combinaison linéaire).

Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (mélanges d'additions et de multiplications par des scalaires).

Cette notion se conçoit géométriquement très simplement dans le plan ou l'espace. Sur la figure ci-contre, \vec{u} est combinaison linéaire de \vec{i} et \vec{j} , mais ce n'est pas le cas de \vec{v} . Par contre, dans l'espace, tout vecteur est combinaison linéaire de \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} .



✗ ATTENTION ! ✗ Péché d'identification.

$$\text{En général : } \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \quad \not\Rightarrow \quad \lambda_k = \mu_k, \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Par exemple : $(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0)$.

Exemple 14 Dans \mathbb{R}^2 , montrer que $(2, 7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5, -2)$ et $(1, -3)$

Exemple 15 Dans \mathbb{R}^3 , montrer que tout vecteur est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 5, 6)$ et $(1, 5, 4)$.

Exemple 16 Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire des polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ puisque l'on peut l'écrire $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ pour certains $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 18 - Sous-espace vectoriel. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E STABLE PAR ADDITION ET PAR MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E lorsque F est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les lois $+$ et \cdot de E .

Notamment, pour un sous-espace vectoriel F de E , $0_F = 0_E \in F$ et F est nécessairement une partie non vide de E . L'égalité $0_F = 0_E$ résulte de l'unicité de l'élément neutre pour l'addition dans F .

Exemple 19 - Sous-espaces vectoriels triviaux. Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E – parfois dits *triviaux*. Notamment $\{0_E\}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel – parfois dit *trivial*.

Exemple 20 La partie $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + x + y^2 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En effet, F n'est pas stable par multiplication par un scalaire, puisque $(-1, 0) \in F$ tandis que $(-2, 0) = 2(-1, 0) \notin F$. Ni par addition d'ailleurs, puisque $(-2, 0) = (-1, 0) + (-1, 0)$.

Théorème 21 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E . S'équivalent :

- (i) F est un sous-espace vectoriel de E ;
- (ii) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet 0_E \in F ; \\ \bullet F \text{ est stable par combinaison linéaire : } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F. \end{array} \right.$

Démonstration.

- (i) \implies (ii). Si F est un sous-espace vectoriel de E , on a vu que $0_E = 0_F \in F$. De plus, pour tous $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, λx et μy sont des éléments de F , partie stable de E par multiplication par un scalaire, et enfin $\lambda x + \mu y \in F$, car F est stable par addition.
- (ii) \implies (i). Si l'assertion (ii) est vraie, F est en particulier stable par addition (pour $\lambda = \mu = 1$) et multiplication par un scalaire (pour $y = 0_E$). En outre, pour tout $x \in F$, l'opposé $-x$ de x dans E appartient aussi à F (pour $\lambda = -1$ et $y = 0_E$). Les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels ne requièrent aucune vérification particulière puisqu'une relation vraie sur E tout entier l'est aussi sur F .

■

Exemple 22 La partie $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En pratique

- Pour établir qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, on utilisera TOUJOURS la caractérisation précédente, qui évite de vérifier les 8 axiomes de la définition d'un espace vectoriel !
- Pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est sous-espace d'un autre espace vectoriel connu. D'où l'importance des espaces vectoriels classiques donnés en exemple précédemment (exemples et théorèmes 5 à 10).

Théorème 23 - Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire HOMOGENÈ $AX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

En particulier, toute droite de \mathbb{R}^2 PASSANT PAR $(0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , et toute droite et tout plan de \mathbb{R}^3 PASSANT PAR $(0, 0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. ...

■

Remarque 24 Le théorème précédent établit ainsi que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^p . En effet, un tel système équivaut à une équation matricielle $AX = 0$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et les éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ s'identifie à ceux de \mathbb{K}^p par transposition.

Exemple 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n à coefficients dans \mathbb{K} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, il s'agit bien d'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient la matrice nulle et nous avons déjà observé que toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures en est encore une.

Exemple 26 - Espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

✗ ATTENTION ! ✗ L'ensemble des polynômes de degré ÉGAL à n n'est PAS un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ – il ne contient même pas le polynôme nul !

Exemple 27 - Le principe de superposition revisité. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène sur un intervalle non vide est un espace vectoriel

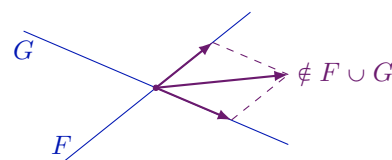
Exemple 28

- L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
- C'est aussi le cas des suites récurrentes linéaires.

Théorème 29 - Intersections de sous-espaces vectoriels. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. ...

✗ ATTENTION ! ✗ En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est PAS un sous-espace vectoriel en général – la stabilité par addition n'est clairement pas assurée !



1.4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

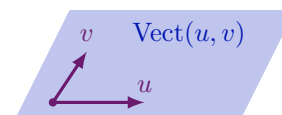
Définition-Proposition 30 - Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et X une partie finie de E .

- (i) L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X , noté $\text{Vect}(X)$, est un sous-espace vectoriel de E , appelé le *sous-espace vectoriel (de E) engendré par X* . Si $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, on le note aussi $\text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et

$$\text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

- (ii) $\text{Vect}(X)$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . Cela signifie que $\text{Vect}(X)$ contient X et que tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\text{Vect}(X)$.

Démonstration. ...



En pratique Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit souvent de l'écrire comme un Vect .

Exemple 31 Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}((1, 2))$ est la droite de \mathbb{R}^2 passant par $(0, 0)$ et dirigée par $(1, 2)$.

Exemple 32 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.

Exemple 33 Le plan \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 d'équation $2x - y + 3z = 0$ passe par le point $(0, 0, 0)$ et est dirigé par les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 3, 1)$. Montrer que $\mathcal{P} = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.

En effet, $\mathcal{P} = \{(x, 2x + 3z, z)\}_{x,z \in \mathbb{R}} = \{(x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1))\}_{x,z \in \mathbb{R}} = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.

Exemple 34 La droite \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 d'équation $\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ passe par le point $(0, 0, 0)$ et est dirigée par le vecteur $(1, -2, 3)$. Montrer que $\mathcal{D} = \text{Vect}((1, -2, 3))$.

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{3}L_2 \iff y = -2x \text{ et } z = 3x.$$

Finalement $\mathcal{D} = \{(x, 2x, 3x)\}_{x \in \mathbb{R}} = \{x(1, -2, 3)\}_{x \in \mathbb{R}} = \text{Vect}((1, -2, 3))$.

Exemple 35 Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille 2 à coefficients réels.

Exemple 36 Si l'ensemble des scalaires est \mathbb{R} , $\text{Vect}(1) = \{a \times 1\}_{a \in \mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\text{Vect}(1, i) = \{a \times 1 + b \times i\}_{a,b \in \mathbb{R}} = \mathbb{C}$. En revanche, si l'ensemble des scalaires est \mathbb{C} , $\text{Vect}(1) = \{a \times 1\}_{a \in \mathbb{C}} = \mathbb{C}$.

Proposition 37 - Propriétés des Vect. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, X et Y des parties finies de E et $x, a, b \in E$.

- (i) **Inclusion.** Si $X \subset Y$, alors $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel qui contient une famille finie $(x_i)_{i=1, \dots, n}$, alors il contient aussi $\text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- (ii) **Oter un vecteur.** Si $x \in X$ est combinaison linéaire des autres éléments de X , i.e. $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $\text{Vect}(X) = \text{Vect}(X \setminus \{x\})$.
- (iii) **Remplacer un vecteur.** Si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a , alors

$$\text{Vect}(X \cup \{a\}) = \text{Vect}(X \cup \{b\}).$$

Démonstration. ... ■

 **En pratique**  Ces règles doivent être mise en pratique plutôt qu'être apprises sous la forme de formule abstraites, voir l'exemple suivant.

Exemple 38 Dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 0), \underbrace{(1, 3, 0)}_{\substack{\text{Combinaison linéaire} \\ \text{de } (1,1,0) \text{ et } (0,1,0)}}) &= \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 0)) = \text{Vect}((1, 1, 0) - (0, 1, 0), (0, 1, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}. \end{aligned}$$

2 Familles de vecteurs

2.1 Parties et familles génératrices

Définition 39 - Partie/famille génératrice (finie).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs de E .

On dit que la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ (ou la partie $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$) est *génératrice de E* ou *engendre E* lorsque tout élément de E est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, i.e. $E = \text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple 40 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 41 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, ainsi $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{K}^2 . De même, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre \mathbb{K}^3 . Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de \mathbb{K}^n . En effet, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Exemple 42 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, puisque, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{K}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors génératrice de

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \text{ puisque, pour tout } A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Pouvez-vous donner une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, puis de $A_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques ?

Exemple 43 La famille $(1, i)$ engendre le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , mais (1) suffit à engendrer le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Le théorème qui suit n'est qu'une simple reformulation du théorème 37 de propriétés des Vect.



Proposition 44 - Propriétés des parties génératrices. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, X et Y deux parties finies de E .

(i) **Inclusion.** Si X engendre E et $X \subset Y$, alors Y engendre E .

(Toute « sur-famille » d'une famille génératrice est génératrice.)

(ii) **Oter un vecteur.** Si X engendre E et si $x \in \text{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $X \setminus \{x\}$ engendre E .

(iii) **Remplacer un vecteur.** Si $X \cup \{a\}$ engendre E et si b est combinaison linéaire de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient NON NUL sur a , alors $X \cup \{b\}$ engendre E .

 **En pratique**  Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel revient à l'écrire comme un Vect.

Exemple 45 L'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par la famille $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

En effet, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} z = x + 2y \\ t = -x + y \end{cases}$,

ainsi $E = \{(x, y, x + 2y, -x + y)\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \{x(1, 0, 1, -1) + y(0, 1, 2, 1)\}_{x,y \in \mathbb{R}} = \text{Vect}((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

Ceci montre SIMULTANÉMENT que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et que $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$ engendre E .

Exemple 46 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X^2 - 4X + 3$.

En effet, pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$P \in F \iff 2P(X + 1) = XP' \iff 2a(X + 1)^2 + 2b(X + 1) + 2c(X + 1) + 2d = X(3aX^2 + 2bX + c)$$

$$\iff \begin{cases} 2a = 3a \\ 6a + 2b = 2b \\ 6a + 4b + 2c = c \\ 2a + 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 4b + c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = -4b \\ d = 3b. \end{cases}$$

Ainsi $F = \{bX^2 - 4bX + 3b\}_{b \in \mathbb{R}} = \{b(X^2 - 4X + 3)\}_{b \in \mathbb{R}} = \text{Vect}(X^2 - 4X + 3)$.

Ceci montre SIMULTANÉMENT que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $(X^2 - 4X + 3)$ engendre F .

2.2 Parties et familles libres ou liées

Définition 47 - Partie/famille libre d'un nombre fini de vecteurs. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (x_1, \dots, x_n) une famille de E . Cette famille est dite *libre* (ou encore les vecteurs x_1, \dots, x_n sont dits *linéairement indépendants*) lorsque :

$$\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right).$$

Remarque 48 - Identification des coefficients pour une famille libre. De manière équivalente, une famille (x_1, \dots, x_n) est libre lorsque :

$$\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}, (\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i \right),$$

En résumé :

FAMILLE GÉNÉRATRICE = EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire.
 FAMILLE LIBRE = UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, ce qui autorise les IDENTIFICATIONS.

Définition 49 - Partie/famille liée d'un nombre fini de vecteurs, couple de vecteurs colinéaires.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. La partie $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ou la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite *liée* ou les vecteurs x_1, \dots, x_n sont dits *linéairement dépendants* lorsque la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est PAS libre. Ceci équivaut à ce qu'AU MOINS UN des vecteurs x_1, \dots, x_n soit combinaison linéaire des autres.
- Soit $x, y \in E$. Les vecteurs x et y sont dits *colinéaires* lorsque la paire $\{x, y\}$ est liée, i.e. lorsque x ou y est un multiple de l'autre.

Dire que $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est liée revient à dire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \text{ et } \exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{i_0} \neq 0 \right)$, auquel cas $x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} \lambda_i x_i$, i.e. x_{i_0} est « combinaison linéaire des autres x_i ».

Exemple 50 - Des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Montrer que la famille $((2, 1, 2), (1, 0, 2), (0, 1, 1))$ est libre dans \mathbb{R}^3 . Et $((2, 1, 2), (1, 0, 2), (0, 1, 1), (8, 4, 11))$?

Les trois famille suivantes sont libres quasiment par définition :

Exemple 51 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans \mathbb{K}^n – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE FAMILLE DE SCALAIRES.

En effet, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ainsi l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (0, \dots, 0)$ implique directement $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemple 52 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UN POLYNÔME.

Exemple 53 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors libre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ – principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE.

Exemple 54 Toute partie/famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée.

En effet, le vecteur nul est combinaison linéaire – à coefficients tous nuls - de n'importe quelle famille de vecteurs.

Exemple 55 - Famille formée d'un vecteur. Toute partie famille formée d'un seul vecteur est libre si et seulement si le vecteur est non nul.

Exemple 56 - Famille formée de deux vecteurs. Toute partie $\{x, y\}$ (ou famille (x, y)) formée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs sont non colinéaires.

✘ ATTENTION ! ✘ Cette règle, très pratique, est FAUSSE lorsqu'on a plus de deux vecteurs ! Ainsi, la famille de \mathbb{R}^2 suivante : $((1, 1), (1, 0), (0, 1))$ est liée sans qu'aucun des vecteurs ne soient colinéaires à un autre.

Exemple 57 La famille $(1, i)$ est libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} – principe d'IDENTIFICATION DES PARTIES RÉELLE ET IMAGINAIRE – mais liée dans le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} .

En effet, la famille est liée sur \mathbb{C} puisque $i = i \times 1$.

Définition-Proposition 58 - Famille de polynômes échelonnée en degré.

Toute famille (P_1, \dots, P_n) de polynômes NON NULS de $\mathbb{K}[X]$ pour laquelle $\deg P_1 < \dots < \deg P_n$ est dite *échelonnée* (en degré). Une telle famille est libre.

Le cadré précédent a un analogue naturel dans \mathbb{K}^n :

Exemple 59 - Famille échelonnée de vecteurs de \mathbb{K}^n .

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs NON NULS de \mathbb{K}^n . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons i_k l'indice de la première coordonnée non nulle de u_k . La famille (u_1, \dots, u_n) est dite échelonnée lorsque la suite (i_1, \dots, i_n) est strictement croissante. Le cas échéant, la famille (u_1, \dots, u_n) est libre.

La famille $((1, 0, 2, -1), (0, 0, 3, 2), (0, 0, 0, -5))$ est une famille échelonnée de vecteurs de \mathbb{R}^4 et est donc libre.

Exemple 60 La famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 61 La famille $(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 62 La famille (\sin, \cos) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Théorème 63 - Propriétés des parties libres/liées.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et X et Y deux parties finies de E .

(i) **Inclusion.** Si Y est libre et si $X \subset Y$, alors X est libre.

Par contraposition, si X est liée et si $X \subset Y$, alors Y est liée.

(Toute « sous-famille » d'une famille libre est libre / Toute « sur-famille » d'une famille liée est liée.)

(ii) **Ajout d'un vecteur.** Si X est libre, alors

$$X \cup \{y\} \text{ est libre} \iff y \notin \text{Vect } X.$$

Démonstration. ... ■

Dire qu'une famille est libre revient à dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Ainsi, si l'on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, il est nécessaire de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs, autrement dit veiller à n'ajouter que des vecteurs linéairement indépendants de ceux déjà présents.

2.3 Bases

Définition 64 - Base. Une famille \mathcal{B} est une *base de E* lorsque \mathcal{B} est une famille libre et génératrice de E

La résultat suivant est évident mais très important :

Définition-théorème 65 - Coefficients dans une base. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'une unique façon comme une combinaison linéaire de \mathcal{B} , autrement dit :

$$\forall x \in E, \exists!(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

La famille de scalaires $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ est appelée la *famille des coordonnées de x dans \mathcal{B}* .

Les bases sont toujours des FAMILLES et non des ensembles.

Le résultat suivant est une synthèse des exemples précédents (cf. exemples 41 à 42 et 51 à 53).

Théorème 66 - Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• **Familles de scalaires.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathbb{K}^n – dite *base canonique*.

• **Polynômes.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ – dite *base canonique*.

• **Matrices.** Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ – dite *base canonique*.

Le qualificatif « canonique » doit être compris au sens de « la plus naturelle ». On veillera à ne pas l'utiliser à tort et à travers ! De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de (x_1, \dots, x_n) dans la base canonique sont... ce vecteur lui-même ! On peut difficilement faire plus simple.

• Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est la famille $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de ses coefficients.

• Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille de coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$... i.e. A elle-même.

Exemple 67 La famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Exemple 68 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 4, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $(3, 1, 20)$. Quelles sont ses coordonnées dans la base \mathcal{B} ?

Exercice 69 La famille $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

En effet, plutôt que de montrer en deux temps le caractère libre et générateur de ladite famille, procédons plus efficacement en établissant que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est combinaison linéaire d’une unique façon de $X^2 + X, X^2 + 1$ et $X + 1$:



$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \exists!(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \quad P = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^2 + 1) + \nu(X + 1).$$

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$P = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^2 + 1) + \nu(X + 1) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda + \nu = b \\ \mu + \nu = c \end{cases} \text{ après identification}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \mu - \nu = a - b \\ \mu + \nu = c \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \mu - \nu = a - b \\ \nu = \frac{-a + b + c}{2} \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}.$$

Le système est donc de Cramer (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls) et admet donc une unique solution.

 **En pratique**  Pour déterminer une base d’un espace vectoriel, on en cherche initialement une famille génératrice en écrivant celui-ci comme un Vect, puis on essaie d’établir que la famille obtenue est libre.

Exemple 70 La famille $((2, 1, 1))$ est une base du sous-espace vectoriel A de \mathbb{R}^3 défini par $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$.

En effet, On résout le système

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $A = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$.

Exercice 71 L’ensemble F des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M + \text{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

En effet, Déterminons de façon autonome une telle base.

- Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in F \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff d = -a$ et $c = b$.

Ainsi $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in \mathbb{R}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Il nous reste à vérifier que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Or, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, clairement $\lambda = \mu = 0$.

Exemple 72 - Base des polynômes de Lagrange. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés à ces n points. La famille (L_1, \dots, L_n) est alors une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et les coordonnées d’un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans cette base est $(P(x_1), \dots, P(x_n))$.

En effet, nous avons établi en exercice (chapitre sur les polynômes) que, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$,

$$P = \sum_{i=1}^n y_i L_i \iff y_i = P(x_i), \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Exemple 73 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(\lambda), P'(\lambda), \frac{P''(\lambda)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!})$.

3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 74 - Somme de deux espaces vectoriels. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} espace vectoriel E . On appelle somme de F et G le sous-ensemble de E défini comme

$$F + G = \{x + y, x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E , qui est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de F et de G .

✗ ATTENTION ! ✗ Ce n'est pas l'addition standard que vous connaissez, mais une nouvelle manière de définir un ensemble. On évite les règles de calculs sur ce symbole $+$, ou encore de faire la différence de sous-espaces vectoriels

Théorème 75 - Partie génératrice d'une somme de deux sous-espaces vectoriels.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $F + G$ est aussi le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G , ce qui signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient également $F + G$. Autrement dit, $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

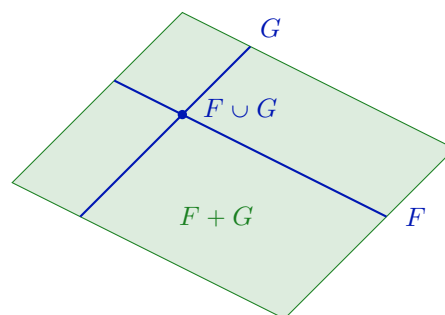
De plus, soient X et Y deux parties finies de E . Alors

$$\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y).$$

Autrement dit, si X (resp. Y) est une partie génératrice de F (resp. de G), alors $X \cup Y$ est une partie génératrice de $F + G$.

Démonstration. ... ■

✗ ATTENTION ! ✗ Il ne faut pas confondre SOMME et RÉUNION ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général (cf. exercice 15.6).



Exemple 76 $E + E = E$, $E + \{0_E\} = E$ et $\{0_E\} + \{0_E\} = \{0_E\}$.

Exemple 77 Les droites vectorielles $F = \text{Vect}((1, 0, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$ de \mathbb{R}^3 ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.

Définition 78 - Somme directe. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} espace vectoriel E . On dit que la somme $F + G$ est directe lorsque

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

On note alors $F + G = F \oplus G$.

Exemple 79 - Une sommes directes. Montrer que dans \mathbb{C} , \mathbb{R} et $i\mathbb{R}$ sont en somme directe.

Proposition 80 - Caractérisation des sommes directes (très utile). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Exemple 81 Dans \mathbb{K}^3 , le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et la droite $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = y = z\}$ sont en somme directe.

Exemple 82 - Encore des sommes directes.

1. Les sous espaces de $F = \text{Vect}((2, 1, 2), (1, 0, 2))$ et $G = \text{Vect}((6, -1, 0))$ sont-ils en somme directe dans \mathbb{R}^3 ? Et $\text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\text{Vect}((1, 1, 1))$?
2. Et les sous-espaces de \mathbb{R}^4 suivants : $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, 1))$ et $G = \text{Vect}((2, 0, 4, 1))$?

Définition 83 - Espaces supplémentaires. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque

$$E = F \oplus G.$$

De manière équivalente :

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x, y) \in F \times G, \quad u = x + y.$$

Cette définition est en fait assez proche de la notion de base, mais avec deux sous-espaces vectoriels à la place d'une famille de vecteurs. Noter que cette écriture indique deux choses la somme est directe, et vaut E entier.

Exemple 84 - Des supplémentaires.

1. Reprendre les exemples précédents et dire si les sommes supplémentaires dans l'espace vectoriels de chaque exemple.
2. Notons $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ainsi que F et G les sous-ensembles des fonctions de E qui sont paires et impaires, respectivement. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , et qu'ils sont supplémentaires dans E .
3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , en donner une base. Donner un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^3 .
4. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$. Mêmes questions que ci-dessus mais dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

✗ ATTENTION ! ✗

- Il ne faut pas confondre les notions de « supplémentaire dans E » et de « somme directe ». Dire que F et G sont en somme directe revient à affirmer que tout vecteur de E admet AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Dire que F et G sont supplémentaires dans E revient à affirmer en plus que $E = F + G$ et donc que tout vecteur de E admet EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
- Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? Oui, toutefois nous le démontrerons seulement en dimension finie (dans le chapitre dédié à la dimension).
- Il est interdit de parler « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en général, faute d'unicité (cf. exemples 85 et 86 ci-dessous).
- Il ne faut pas non plus confondre la notion vectorielle de « supplémentaire » avec celle ensembliste de « complémentaire ». D'une part, il y a absence d'unicité pour la supplémentarité, alors qu'il y a unicité du complémentaire. D'autre part, un supplémentaire est un sous-espace vectoriel, tandis que le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient même pas le vecteur nul.

Exemple 85 Deux droites NON CONFONDUES passant par $(0, 0)$ sont toujours supplémentaires dans \mathbb{R}^2 . Si P est un plan de \mathbb{R}^3 passant par $(0, 0, 0)$ et D une droite de \mathbb{R}^3 passant par $(0, 0, 0)$ NON CONTENUE DANS P , alors P et D sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 86 La droite $G_\alpha = \text{Vect}((1, \alpha, 1))$ est un supplémentaire de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ dans \mathbb{R}^3 , pour tout $\alpha \neq -2$.

Exemple 87 L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 88 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n , $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$, où $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
Indication : pour un polynôme A quelconque, comment l'écrire $A = PQ + R$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$?