Chapitre 18 - Géométrie dans l'espace

1 Différents modes de repérage

Cette section ressemble à son analogue dans le chapitre géométrie du plan, mais nous savons maintenant ce qu'est une base...

Définition 1 - Repère cartésien de l'espace. On appelle repère cartésien de l'espace tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace, et où la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.
Le point O est appelé *origine du repère*, la droite passant par O orientée par le vecteur $\vec{i}$ est appelée *l'axe des abscisses*, celle passant par O orientée par le vecteur $\vec{j}$ *l'axe des ordonnées*, et celle passant par O orientée par le vecteur $\vec{k}$ *l'axe des cotes*.

✎ **En pratique** ✎ Montrer qu'un triplet est un repère revient à montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Nous verrons bientôt des outils puissants pour cela.

Définition 2 - Coordonnées cartésiennes. Soit l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{E}$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

De même, un point M étant identifié au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La valeur x est l'abscisse de M, la valeur y l'ordonnée, et la valeur z la cote (sous-entendu : dans le repère...).
On peut noter $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $M = (x, y, z)$.

La définition d'un repère orthonormal direct déjà été vue en sciences physiques et en SII, en particulier la règle des trois doigts vous permet de dire si une repère orthonormé est direct ou pas. En cas de doute, demander !

Proposition 3 - Coordonnées cylindriques. Soit l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée direct.
Alors on a :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \exists (r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + z\vec{k}.$$

Le triplet (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques de M.

✎ **En pratique** ✎ Le couple (r, θ) sont les coordonnées polaires du projeté orthogonal de M dans le plan d'équation $z = 0$.

Les coordonnées cylindriques sont vraiment l'extension des coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$. On a les mêmes problèmes d'unicité pour l'angle θ que dans les coordonnées polaires, en particulier si M est situé sur l'axe (Oz), on peut prendre n'importe quelle valeur pour l'angle θ, tandis que $r = 0$.

Exemple 4 - Changer de coordonnées.

1. Donner les coordonnées cylindriques du point de coordonnées cartésiennes $(2, -\sqrt{12}, 5)$.
2. Donner les coordonnées cartésiennes du point de coordonnées polaires $(6\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -4)$.

Noyez qu'il existe aussi des coordonnées sphériques, particulièrement adaptées aux équations du mouvement de l'espace, un peu plus dure cepandant à manipuler.

2 Produit scalaire

Rien de vraiment nouveau dans ce chapitre par rapport au chapitre « produit scalaire dans le plan », nous passerons donc globalement assez vite.

Définition-Proposition 5 - Norme euclidienne. Soit l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit $\vec{u} \in \mathcal{E}$, de coordonnées cartésiennes (x, y, z). Alors on définit la norme euclidienne de $\vec{u}$ comme

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ce nombre ne dépend pas du choix de la base orthonormée, il représente la distance entre l'origine et un point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Exemple 6 - Norme euclidienne et coordonnées cylindriques. Soit $\vec{u} \in \mathcal{E}$, de coordonnées cylindriques (r, θ, z). Alors $\|\vec{u}\|^2 = \sqrt{r^2 + z^2}$, en particulier elle ne dépend pas de θ.

Définition 7 - Produit scalaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est défini comme l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, en tant que vecteurs du plan qu'ils engeandrent. On appelle produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 \quad \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases} .$$

Remarque 8 - Lien avec la géométrie.

- (Lien avec la norme euclidienne). On a la formule

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace est le produit scalaire de ces mêmes vecteurs, en tant que vecteurs du plan $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ qu'ils engeandrent. On peut donc en déduire les mêmes remarques géométriques que pour le produit scalaire dans le plan.

Définition 9 - Bilinéarité et symétrie. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ est bilinéaire et symétrie. On renvoit aux formules données pour le produit scalaire dans le plan, vu que ce sont exactement les mêmes.

Théorème 10 - Expression dans une base orthonormée. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, de coordonnées cartésiennes respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère cartésien orthonormé. Alors on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Le théorème suivant est une redite de celui donné pour le produit scalaire dans le plan :

Théorème 11 - Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Proposition 12 - Orthogonalité et produit scalaire. Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Les applications arrivent !

3 Produit vectoriel

Le produit vectoriel consiste à fabriquer un vecteur de l'espace (*i.e.* de $\mathbb{R}^3$) à partir de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés. C'est une notion qui intervient naturellement dans de nombreux domaines de la physique, par exemple la loi de Lorentz affirme qu'une particule de charge électrique q, soumise à un champ magnétique $\vec{B}$, et possédant une vitesse $\vec{v}$, subit la force $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Définition 13 - Produit vectoriel (définition géométrique). Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathcal{E}$ non colinéaires, on définit leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme le vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe, et dont la norme vaut $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.
Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on définit leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme étant le vecteur nul.

Notez qu'une famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs non coplanaires (une base, autrefois appelée repère), avec $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est dite directe quand les angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{w})$, choisis dans $]-\pi, \pi[$, sont de même signe. En particulier, si on visse en allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ (par le chemin le plus court), la vis avance dans la direction $\vec{w}$. La règle des trois doigts permet de voir si un repère est direct (ou pas).

Remarque 14 - Lien avec une aire. La norme du produit vectoriel $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallèlogramme engeandré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La proposition suivante fournit des calculs à l'aide des coordonnées cartésiennes :

Théorème 15 - Expression dans une base orthonormée du produit vectoriel. Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur dont les coordonnées dans cette même base sont

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

✎ **En pratique** ✎ On prendra bien garde à ne pas apprendre cette formule par coeur, mais à l'appliquer via la "règle du γ" pour calculer chaque coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exemple 16 Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 1, -4)$.

La proposition suivante permet de construire un repère orthonormée en partant de deux vecteurs déjà orthogonaux :

Exemple 17 Donner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, contenus dans le plan (Oxy) d'équation $z = 0$, qui soient orthogonaux, de normes respectives 2 et 3. Calculer leur produit vectoriel par la méthode de votre choix. Même question, avec cette fois-ci la contrainte $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$ à la place de $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Proposition 18 - Repère orthonormé. Soient deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux et de norme 1. Alors $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j})$ est un repère orthonormée direct.

La proposition suivante donne des règles de calculs algébriques :

Proposition 19 - Antisymétrie et bilinéarité. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

- Bilinéarité : $\begin{cases} (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{w} \wedge (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{w} \wedge \vec{u} + \beta\vec{w} \wedge \vec{v} \end{cases}$.
- Antisymétrie : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

✎ **En pratique** ✎ Insistons sur le point suivant : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathcal{E}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Exemple 20 Soient $\vec{u} = (1, -1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Simplifier puis calculer le vecteur $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$.

Exemple 21 - Identité de Lagrange. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$. Montrer que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

4 Produit mixte dans l'espace

Définition 22 - Produit mixte. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle produit mixte des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le réel, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, défini par

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Proposition 23 - Lien avec la géométrie. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires.
- Si le produit mixte est non nul, alors $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ est le volume du parallèlépipède engeandré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. De plus, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ si et seulement si le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct.

Proposition 24 - Antisymétrie et trilinéarité. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^3$, et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

- Trilinéarité :
$$\begin{cases} [(\alpha\vec{u} + \beta\vec{p}), \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}] \\ [\vec{u}, (\alpha\vec{v} + \beta\vec{p}), \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{p}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, (\alpha\vec{w} + \beta\vec{p})] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}] \end{cases}$$
- Antisymétrie après permutation de deux vecteurs : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$.

Exemple 25 - Symétrie après circulation de trois vecteurs. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$. Montrer que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$.

Proposition 26 - Expression dans une base orthonormée directe. Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée directe sont (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3). Alors on a

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

On note aussi

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

✎ **En pratique** ✎ On a maintenant un moyen clair de savoir si trois vecteurs de l'espace forment une base : on regarde si leur produit mixte est nul ou pas. Hors de question de retenir par coeur la formule en fonction des coordonnées. Il vaut mieux acquérir des moyens visuels pour l'appliquer (voir notes de cours).

Remarque 27 - Bientôt, le déterminant. La notation précédente sera revue en tant que déterminant d'une famille de vecteurs. Si vous avez bien assimilé les propriétés du produit mixte, vous avez pris de l'avance sur ce point difficile du programme de première et deuxième année !

Exercice 28 - La force du produit mixte. Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 0, -\lambda)$, $(2, \lambda, -1)$ et $(\lambda, 2, 1)$ sont-ils coplanaires ? Pour quelles valeurs forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

5 Plans et droites

5.1 Plans

Un plan affine de l'espace peut être défini de nombreuses manières. En voici quelques-unes :

Définition 29 - Définition d'un plan 1 : un point et deux vecteurs directeurs. Soit un point A de l'espace et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}] = 0.$$

On peut le noter $A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Une forme paramétrique est $\{A + s\vec{u} + t\vec{v}, (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

La notation $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est bien celle issue du chapitre sur les espaces vectoriels : dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, il s'agit du sous-espace vectoriel engeandré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il s'agit d'un plan vectoriel, c'est-à-dire un plan qui passe par l'origine. Le plan affine $A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ lui est parallèle.

Définition 30 - Définition d'un plan 2 : trois points non alignés. Soient trois points non alignés, A, B et C. Le plan passant par A, B et C est l'ensemble des points M tels que

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0.$$

De manière équivalente, ce plan est donc aussi $A + \text{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (et on peut permuter les rôles de A, B et C).

Définition 31 - Définition d'un plan 3 : un point et un vecteur normal. Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$. Le plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

On peut le noter $A + \text{Vect}(\vec{n})^\perp$, où $\text{Vect}(\vec{n})^\perp$ est le plan vectoriel de vecteur normal $\vec{n}$.

Voici sur un exemple les différentes mises en équation d'un équation d'un plan

Exemple 32 - Trois méthodes pour deux équations. Soient $A = (2, -1, 4)$, $\vec{u} = (1, 1, -1)$ et $\vec{v} = (-5, -2, 3)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A, dirigée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Donner une représentation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$, puis retrouver le résultat de la question précédente.
3. Donner une représentation paramétrique du pan $\mathcal{P}$.

A l'inverse, étant donnée une équation, on doit facilement donner les éléments géométriques du plan :

Exemple 33 - Description d'un plan à partir d'une équation. Soit $\mathcal{P} = \{M = (x, y, z) \in \mathcal{E},\ x + 2y + 3z - 12 = 0\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un plan dont on donnera un point et un vecteur normal. Déterminer également deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

5.2 Droites

Les manières de définir une droite de l'espace sont sensiblement les mêmes que dans le plans :

- Un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, qui conduit à sa forme paramétrique
$$\mathcal{D} = \{A + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}\}.$$
- Deux points A et B de la droite. On se ramène au cas précédent puisque $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur.
- L'intersection de deux plans. C'est la vision cartésienne Voyons ci-dessous comment déduire la paramétrique.
- Deux vecteurs normaux non colinéaires et un points de passage.

✎ **En pratique** ✎ Il faut absolument savoir comment voyager entre les équations paramétriques et cartésiennes d'une droite. On évitera de chercher manuellement des coefficients, mais on se servira des éléments géométriques caractérisant plans et droites (vecteurs normaux et directeurs). Plus précisément :

- (Paramétrique vers cartésien). Si on dispose d'une forme paramétrique pour une droite $\mathcal{D}$ (ou de deux points de la droite).
  Idée clef : Chercher deux vecteurs perpendiculaires à $\mathcal{D}$ et regarder les plans dont ce sont les normales.
  1. Lire sur l'équation un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite.
  2. Chercher un vecteur $\vec{n}$ perpendiculaire à $\vec{u}$. Un autre vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ est donné par $\vec{n}' = \vec{u} \wedge \vec{n}$.
  3. Considérer les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}' = 0$.

  Alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
- (Cartésien vers paramétrique). Si on dispose de équations de plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
  1. Lire sur les équations des plans des normales $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Vérifier au passage que les plans ne sont pas parallèles.
  2. Un vecteur directeur de $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est donné par $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.
  3. Déterminer un point A de $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, par exemple en prenant une des trois coordonnées nulles.

Exemple 34 - Différentes mises en équations.

1. (De paramétrique vers cartésien).
   a. Soit la droite $\mathcal{D}$ donnée par la représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ -2 + 3t \\ 3 - 4t \end{cases}.$$
   b. Donner un point A de $\mathcal{D}$ ainsi qu'un vecteur directeur.
   c. Donner une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire la décrire comme l'intersection de deux plans dont on donnera les équations.
2. (Pareil, en partant de deux points) Soient $A = (1, -2, 3)$, $B = (5, 1, -1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, puis une représentation cartésienne.
3. (De cartésien vers paramétrique) Soit l'ensemble défini par
   $$\mathcal{D} = \{M = (x, y, z) \in \mathcal{E}, 13x - 20y - 2z - 47 = 0 \text{ et } 7x - 8y + z - 26 = 0\}.$$
   a. Montrer que cet ensemble est une droite. Donner sa représentation paramétrique.
   b. Donner deux équations de plans, distincts des deux précédents, dont l'intersection est encore la droite $\mathcal{D}$.

5.3 Distance d'un point à un plan ou à une droite

La définition suivante est un copié-collé de celle donnée dans le plan :

Définition 35 - Projection ortogonale sur une droite. Soit M un point de l'espace, $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$.
Ce point H est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche du point M, au sens euclidien. La distance HM est appelée la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$, on la note $d(M, \mathcal{D})$.

On a donc
$$d(M,\mathcal{D}) = \min_{A\in\mathcal{D}} \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$$

Proposition 36 - Distance d'un point à une droite. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour un point M de l'espace, on a
$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Encore une fois, il peut être intéressant d'avoir normé le vecteur directeur $\vec{u}$.

✎ **En pratique** ✎ La méthode pour trouver le projeté orthogonal dans le plan reste valide : il suffit d'écrire
$$\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\right) \vec{u},$$
où le vecteur directeur $\vec{u}$ est supposé normé.

Exemple 37 - Exemple de distance à une droite. Déterminer la distance du point $M = (2,3,4)$ à la droite définie par les équations suivantes :
$$\mathcal{D} : \begin{cases} 13x - 20y - 2z - 47 = 0 \\ 7x - 8y + z - 26 = 0 \end{cases}.$$
Donner les coordonnées du projeté orthogonale.

Définition 38 - Projection ortogonale sur un plan. Soit M un point de l'espace, $\mathcal{P}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$. On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ l'unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{HM} \wedge \vec{n} = 0$.
Ce point H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche du point M, au sens euclidien. La distance HM est appelée la distance du point M au plan $\mathcal{P}$, on la note $d(M,\mathcal{P})$.

Proposition 39 - Distance d'un point à un plan. Soit $\mathcal{P}$ une droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$. Pour un point M de l'espace, on a
$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

✎ **En pratique** ✎ La méthode pour trouver le projeté orthogonal sur un plan reste visuelle, mais un peu plus complexe. Il faut d'abord trouver une base orthonormée du plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Pour cela, on peut trouver un premier vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, et utiliser $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (de norme 1).
Ensuite, on a une formule analogue à la projection sur une droite : étant donné un point de référence $A \in \mathcal{P}$, on a
$$\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\right) \vec{u} + \left(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}\right) \vec{v}.$$
Essayez de voir les nombres $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v}$ comme les composantes de $\overrightarrow{AH}$ dans le repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{v})$ du plan $\mathcal{P}$.

Remarque 40 - Exemple de distance à un plan, bis. On a également la formule suivante :
$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

Exemple 41 - Exemple de distance à un plan. Déterminer la distance du point $M = (2,3,4)$ au plan défini par $\mathcal{P} : x + 2y + 3z - 12 = 0$. Déterminer le projeté orthogonal.
Même question avec le plan passant par $A = (2,-1,4)$ et dirigé par $\vec{u} = (1,1,-1)$ et $\vec{v} = (-5,-2,3)$.

6 Sphères

Comme dans le plan, une sphère est un objet géométrique : il s'agit de l'ensemble des points de l'espace à égale distance (le rayon) d'un point fixé de l'espace. Elle est donc caractérisée par son centre et son rayon.

Proposition 42 - Equation cartésienne d'une sphère. La sphère de centre $A = (x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R a pour équation cartésienne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Exemple 43 - Plan tangeant à une sphère. Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre $A = (x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R. Soit $B \in \mathcal{S}$. Comment trouver l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en B ?

Exemple 44 - Intersection de sphère et de droite. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $B = (2, 3, 4)$ et de rayon $\sqrt{113}$. Trouver l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite passant par le point $A = (1, -2, 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (4, 3, -4)$.

Exemple 45 - Un problème à paramètre. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $B = (2, 3, 4)$ et de rayon $R > 0$. Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x - 5y + 3z + \alpha = 0$. On commencera par calculer $d(B, \mathcal{P})$.