

Chapitre 1 - Premiers outils mathématiques pour la physique

Ce chapitre est un mélange de différentes “outils” qui vont arriver vite en physique et en SI, que nous reverrons également plus longuement durant l’année. Son aspect est pratique, mais ne nous dispense pas d’une approche rigoureuse.

Nos objectifs :

- Maîtriser la trigonométrie du lycée, en particulier se servir efficacement du cercle trigonométrique. Cet objectif n’est pas optionnel en vue du chapitre suivant. Résoudre des problèmes de superposition de fonctions trigonométriques.
- Reconnaître et dériver une composée de fonctions, en faisant attention au domaine de définition.
- Revoir la notion d’intégration par parties et calculer des primitives.
- Faire le lien entre l’équation de la tangente à une courbe et la notion d’approximation affine donnée par un développement limité.
- Résoudre et comprendre des systèmes 2×2 linéaires.
- S’initier au produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .
- Comprendre la notion d’équation différentielle, et résoudre des équations différentielles d’ordre 1 et 2 à coefficients constants.

1 Commençons par de la trigo

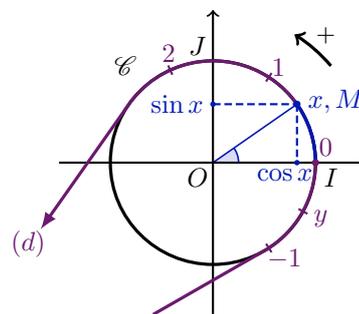
1.1 Cercle trigo et formules

Etant donné $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on rappelle que les quantités $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ ont été définies au collège comme les longueurs des côtés adjacents et opposés d’un angle d’ouverture θ dans un triangle rectangle dont l’hypoténuse est de longueur 1. Réviser au passage votre “*socatoa*” :

$$\sin = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Nous allons développer une vision plus globale de ces quantités à l’aide du **cercle trigonométrique**, un cercle orienté centré en l’origine de rayon 1 :

Enroulement de la droite numérique. Soit (d) une droite numérique graduée, qui représente les réels, et dont le 0 coïncide avec le point I d’un repère orthonormé (O, I, J) du plan. Quand on enroule cette droite sur le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1, dit *cercle trigonométrique*, avec la demi-droite des réels positifs dans le sens direct et la demi-droite des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel x vient s’appliquer sur un unique point M du cercle \mathcal{C} . On dit que le point M est l’*image* de x sur le cercle \mathcal{C} .



Exemple 1 Le point J est l’image de $\frac{\pi}{2}$, mais aussi de $-\frac{3\pi}{2}$.

La longueur du cercle trigonométrique \mathcal{C} , *i.e.* son périmètre, étant 2π , deux réels x et x' ont même point image par cet enroulement sur \mathcal{C} si et seulement si leur distance correspond à un nombre entier de tours de \mathcal{C} , chacun de longueur 2π . Tout point de \mathcal{C} est l’image d’une infinité de réels. Précisément, si x est l’un deux, alors les autres sont les éléments de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela conduit à introduire la notion suivante :

Définition 2 - Relation de congruence. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x est congru à y modulo α , noté $x \equiv y [\alpha]$, lorsque : $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = y + k\alpha$.

Exemple 3

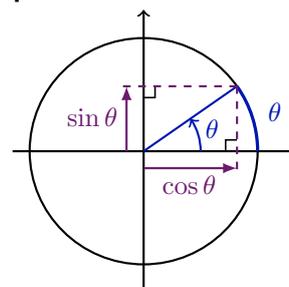
- Être pair, c'est être congru à 0 modulo 2, tandis qu'être impair, c'est être congru à 1 modulo 2.
- Les mesures (en radians) d'angles orientés sont définies modulo 2π .

Définition 4 - Cosinus et sinus d'un réel. Soit M l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique \mathcal{C} . On appelle respectivement *cosinus de x* et *sinus de x* , noté $\cos x$ et $\sin x$, l'abscisse et l'ordonnée de M .

Définition-théorème 5 - Fonctions sinus et cosinus, lien avec le cercle trigonométrique.

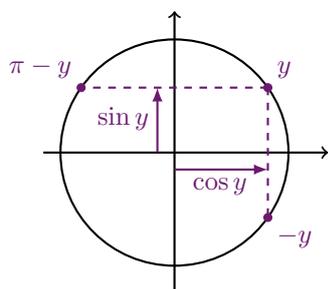
- **Lien avec le cercle trigonométrique.** On a $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$

Pensez à Pythagore! Réciproquement, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ , unique modulo 2π , tel que $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Géométriquement, ce résultat signifie que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$.



- **Angles associés.** Les relations suivantes se lisent toutes sur le cercle trigonométrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{llll} \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & & \\ \sin(x + \pi) = -\sin x & \sin(\pi - x) = \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x^\dagger \\ \cos(x + \pi) = -\cos x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{array}$$



- **Résolution d'équations.** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \sin x = \sin y & \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi] \\ \cos x = \cos y & \iff x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi] \end{cases}$$

Ces équivalences se lisent sur le cercle trigonométrique, ce qu'illustre la figure ci-contre.

A vous de remplir le tableau des valeurs particulières suivantes :

argument (θ)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos θ					
sin θ					

Exemple 6 Justifier avec des démonstrations les valeurs du tableau pour les cosinus et sinus de ces angles particuliers

En effet, Idée pour $\frac{\pi}{3}$: travailler dans le triangle équilatéral OIM .

Idée pour $\frac{\pi}{4}$: travailler dans le triangle isocèle OIM . Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré ?

Les autres valeurs particulières se retrouvent facilement avec les formules ci-dessus, ou avec le cercle trigonométrique. En revanche, rien ne sert de chercher des valeurs particulières là où il n'y en a pas : ne demandez pas ce que vaut $\cos(1)$: cela vaut...ce que cela vaut !

\dagger . Cette égalité traduit la propriété géométrique : « le cosinus (co-sinus) d'un angle x est égal au sinus de l'angle complémentaire $\frac{\pi}{2} - x$ ».

Théorème 7 - Formules d'addition et de produit. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

Pour $a = b$, ces relations s'appellent *formules de duplication* : $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$, $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$,

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a \quad \text{et} \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

Démonstration. Le plus “dur” est de démontrer géométriquement une des formules d'addition. Voici l'idée : on note A le point image de l'angle a , et B le point image de l'angle $a + b$. On note aussi le point A' tel que $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ est un repère orthonormé direct. On écrit alors les relations de trigonométrie de B , mais dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$, en utilisant que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ vaut b . ■

Exemple 8 D'après les relations $\sin(x + \pi) = -\sin x$ et $\cos(x + \pi) = -\cos x$, ajouter π dans un sinus ou un cosinus revient à le multiplier par -1 . Ainsi, a fortiori, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ajouter $k\pi = \underbrace{\pi + \dots + \pi}_{k \text{ fois}}$ revient à multiplier par $\overbrace{(-1) \times \dots \times (-1)}^{k \text{ fois}} = (-1)^k$ et cela reste vrai pour $k \in \mathbb{Z}$. Finalement, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x.$$

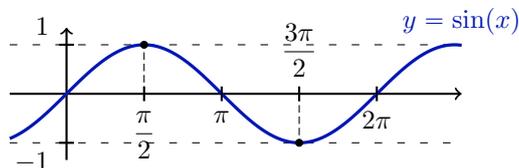
Exemple 9 Ces formules d'addition permettent de trouver de nouvelles valeurs de cosinus et de sinus pour certains angles. Par exemple, exprimer $\frac{1}{12}$ à partir de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, et trouver $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

✗ ATTENTION ! ✗ On évitera les erreurs gravissimes suivantes concernant le sinus et celles similaires pour le cosinus :

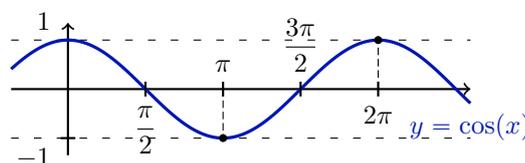
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sin y \not\Rightarrow x = y$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos y \not\Rightarrow x = y [2\pi]$.

Théorème 10 - Les fonctions sinus, cosinus et leurs dérivées. Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies et dérivables sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire et en outre :



$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \text{et} \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$



Démonstration. Le plus “dur” est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Soit M l'image de l'angle x , on coince le triangle OIM d'aire $\frac{1 \times \sin x}{2}$ entre le camembert OIM d'aire $\frac{x}{2}$ et le petit camembert d'ouverture x et de rayon $\cos x$, d'aire $\frac{\cos^2 x \times x}{2}$. On déduit l'inégalité

$$\cos^2 x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

et la limite.

Le reste du théorème découle des manipulations de trigo. ■ Retenez de la preuve les deux limites classiques

suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Exercice 11 - La fonction tangente. Résoudre l'équation $\cos \theta = 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Calculer sa dérivée.

1.2 Transformer des signaux sinusoïdaux

La proposition suivante permet de manipuler la somme de deux signaux donnés par ces fonctions :

Proposition 12 - Somme de signaux périodiques. Soient a et b dans \mathbb{R}^* , alors il existe un unique $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos(t) + b \sin(t) = r \cos(t - \phi).$$

(A savoir retrouver ou expliquer) : on a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, tandis que $\cos \phi$ et $\sin \phi$ sont connus : $(\cos \phi, \sin \phi) = (\frac{a}{r}, \frac{b}{r})$.

En pratique Les quantités r et ϕ correspondent à une amplitude et un déphasage. La preuve est constructive, c'est-à-dire qu'elle permet d'obtenir des relations explicites, en l'occurrence $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, tandis que ϕ est un paramétrage du point $(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}) \in \mathcal{C}$. Cet angle ne sera pas toujours explicite ! Notons que $\tan(\phi) = \frac{b}{a}$, ce qui peut être utile lorsque nous connaissons la fonction réciproque de la tangente. Pour l'instant, cette formule peut être utilisée pour des valeurs numériques avec la touche atan de votre calculette. Attention, celle-ci vous retourne une valeur dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qui est la bonne lorsque ϕ est dans cette intervalle (ce qui correspond à $a > 0$), autrement, il faut ajouter π à ce que donne votre calculette pour obtenir une valeur dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ de ϕ .

Exemple 13 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 2\sqrt{3} \cos t - 6 \sin t$. Donner $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tels que $f(t) = r \cos(t - \varphi)$. Esquisser le graphe de la fonction f .

2 Un peu d'analyse

2.1 Intégrer par parties

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On rappelle qu'une fonction f à valeurs réelles est de classe C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I , et que f' est continue sur I . On note alors $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Nous reviendrons sur ces notions dans le chapitre dédié.

Pour deux fonctions dérivables f et g , vous vous souvenez sûrement de la formule qui permet de calculer la dérivée d'un produit,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pour calculer une intégrale (ou une primitive) d'un produit de fonctions, il n'y a pas de formule aussi pratique.

En revanche, on a le résultat suivant :

Proposition 14 - Intégration par parties (IPP). Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I . Alors pour tout $(a, b) \in I \times I$, on a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

En pratique Pour montrer qu'une fonction est de classe C^1 , il suffira souvent de reconnaître des opérations usuelles (sommées, produits, quotients et composée) de fonctions usuelles. Nous agrandirons dans le chapitre dédié le catalogue des fonctions usuelles. Nous verrons également des fonctions qui ne sont pas dérivables (normalement vous en connaissez déjà une : la valeur absolue en 0), ou alors le sont sans être C^1 .

Dans tous les cas, l'ipp ne fait pas de magie : elle transforme l'intégrale d'un produit en une autre intégrale de produit (peut-être plus simple).

Exemple 15

- Calculer $\int_0^\pi t \cos t \, dt$.
- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.
- Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \ln x$.

2.2 Compositions de fonctions et leurs dérivées

Les énoncés qui suivent permettent de définir de nouvelles fonctions par un procédé primordial : la composition. Rappelons d’abord qu’étant donnés deux ensembles E et F , pour une fonction $f : E \rightarrow F$, on note $f(E)$ le sous-ensemble de F défini par

$$f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

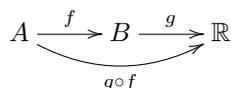
Ce sont les éléments de F qui ont un au moins un antécédant par f , on l’appelle l’image de E par f (ou quand il n’y a pas d’ambiguïté, l’image de f). Nous reviendrons sur ces notions dans le chapitre sur les ensembles.

Exemple 16 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Définition 17 - Composée de fonctions. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(I) \subset J$. On définit la fonction composée de f suivie de g , notée $g \circ f$ (lire “ g rond f ”) par

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L’hypothèse $f(I) \subset J$ assure que pour $x \in I$, le réel $f(x)$ est bien dans l’ensemble de définition de g . On représente la composition par le schéma suivant :



pour bien lire l’ordre de la composition. Notez que ce schéma, qui indique “l’ordre” dans lequel faire les calculs, est dans le sens inverse de la notation $g \circ f$.

Exemple 18 Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$. Déterminer $g \circ f$ ainsi que $f \circ g$. Esquisser leurs courbes représentatives.

Exemple 19 Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, et justifier que l’on peut définir la composée $g \circ f$ sur \mathbb{R} . La calculer. Que dire pour $f \circ g$?

Exemple 20 On cherche à définir la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$. Identifier une composée, et donner un domaine de définition.

Proposition 21 - Dériver une composée. Plaçons-nous dans le cadre de la définition 17, et supposons de plus que f et g soient dérivables sur I et J respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I , et on a

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x).$$

Cette formule, qui doit rapidement devenir un automatisme, vous permettra de dériver la plupart des fonctions données par une forme explicite !

Exemple 22 Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(x^2)$.

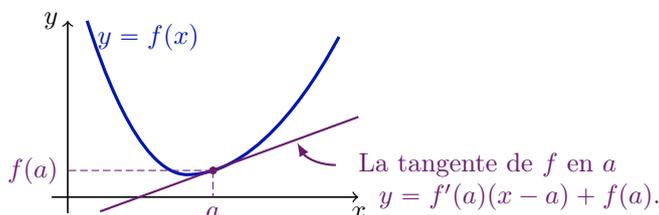
✗ ATTENTION ! ✗ Comme on vient de le constater $g \circ f \neq f \circ g$ en général (c.a.d. sans hypothèse supplémentaire). On dit que la composition des fonctions n’est pas commutative.

2.3 Développement limité

On rappelle qu'étant donnée une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un réel $a \in I$, la tangente à la courbe de f au point a possède pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ce que traduit le terme "tangente", c'est que le membre de droite décrit la fonction affine qui approche le mieux la fonction f au point a .



Une manière de réécrire cela est donnée par le résultat suivant :

Proposition 23 - Développement limité à l'ordre 1. Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un réel $a \in I$, alors on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Cette relation est appelée le *développement limité à l'ordre 1 de f en a* .

Notons qu'en pratique, on ne cherche pas à connaître la fonction ϵ , savoir qu'elle tend vers 0 en a est l'information importante. Notons aussi que ce résultat n'a d'intérêt que lorsque x tend vers a : on dit qu'il est "local".

Exemple 24 C'est cette notion qui justifie l'approximation des petits angles que vous verrez souvent en physique : pour un petit angle x , on dira dans le cours de physique que

$$\sin x \approx \tan x \approx x.$$

Expliquer cette approximation avec un développement limité.

Exemple 25 Donner le développement limité en 0, à l'ordre 1, des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin x$. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

3 Systèmes linéaires 2×2

Sur des exemples, on rappelle comment résoudre des systèmes linéaires, et, plus important, quelle vision géométrique adopter sur l'ensemble des solutions. Par ailleurs, nous allons quitter peu à peu votre méthode de résolution préférée (la substitution) pour aller vers une méthode issue des "combinaisons" : le pivot de Gauss. Cet outil algorithmique consiste à "utiliser" la première inconnue sur L1 pour l'éliminer par combinaison de L2.

Commençons par un exemple facile :

$$\text{Résoudre } \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{d'inconnus } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La méthode naïve de la substitution issue du collège doit être choisie en dernier ressort. Désormais il sera préférable d'éliminer les variables successivement avec la méthode du pivot de Gauss. Pour ce système, on soustrait la première ligne à la deuxième. Cette opération est notée $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, et on peut écrire :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x + y = 1 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

et on conclut facilement : la dernière ligne donne y puis la première x .

Une vision essentielle est celle géométrique : chaque ligne du système original est l'équation d'une droite. Ainsi un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution si et seulement si le point associé est sur l'intersection de deux droites.

Exemple 26 - Un exemple élémentaire. Tracer les droites associées au système précédent et retrouver le résultat.

Ne soyez pas naïf : il n'y a pas toujours une unique solution. On distingue trois cas de systèmes linéaires 2×2 :

- Le cas où les deux lignes sont indépendantes. Les droites associées ne sont pas parallèles, et il y a une unique solution, correspondant à leur intersection.
Exemple : le système précédent.

- Le cas où les deux membres de gauche sont proportionnels, mais pas les seconds membres. Les droites associées sont parallèles mais distinctes, et ne se coupent pas. Le système n'a pas de solution, on dit qu'il est *incompatible*. Si on applique le pivot de Gauss, on aboutit pour L2 à une contradiction.

Exemple : le système
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

- Le cas où les deux équations sont proportionnelles. Elles décrivent en fait la même droite. Le système possède une infinité de solutions, à savoir cette droite elle-même. Si on applique le pivot de Gauss, on aboutit pour L2 à une évidence : $0 = 0$.

Exemple : le système
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

4 Produit vectoriel

Le produit vectoriel consiste à fabriquer un vecteur de l'espace (*i.e.* de \mathbb{R}^3) à partir de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés. C'est une notion qui intervient naturellement dans de nombreux domaines de la physique, par exemple la loi de Lorentz affirme qu'une particule de charge électrique q , soumise à un champ magnétique \vec{B} , et possédant une vitesse \vec{v} , subit la force $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Définition 27 - Produit vectoriel (définition géométrique). Etant donnés deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 non colinéaires, on définit leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme le vecteur orthogonal à \vec{u} et \vec{v} , tels que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe, et dont la norme vaut $|\sin(\vec{u}, \vec{v})| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
Lorsque les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, on définit leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme étant le vecteur nul.

Notez qu'une famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs non coplanaires (une base, autrefois appelée repère), avec \vec{w} orthogonal à \vec{u} et \vec{v} , est dite directe quand les angles orientés (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{v}, \vec{w}) , choisis dans $] -\pi, \pi[$, sont dans le même sens. En particulier, si on visse en allant de \vec{u} vers \vec{v} (par le chemin le plus court), la vis avance dans la direction \vec{w} . La règle des trois doigts permet de voir si un repère est direct (ou pas).

La proposition suivante fournit des calculs à l'aide des coordonnées cartésiennes :

Théorème 28 - Expression dans une base orthonormée du produit vectoriel. Etant donnés deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base orthonormée direct $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur dont les coordonnées dans cette même base sont

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

 **En pratique**  On prendra bien garde à ne pas apprendre cette formule par coeur, mais à l'appliquer via la "règle du γ " pour calculer chaque coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exemple 29 Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 1, -4)$.

 **En pratique**  M'sieur, les vecteurs c'est en ligne ou en colonne?!? Tout n'est que convention. Dans un cours, les lignes, ça prend moins de place... mais on colonne, on ne risque pas de les confondre avec autre chose... tant que vous restez clair, tout ira bien! Et bientôt, nous enlèverons les flèches...

Exemple 30 Donner deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 , contenus dans le plan (Oxy) d'équation $z = 0$, qui soient orthogonaux, de normes respectives 2 et 3. Calculer leur produit vectoriel par la méthode de votre choix. Même question, avec cette fois-ci la contrainte $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$ à la place de $\vec{u} \perp \vec{v}$.

La proposition suivante donne des règles de calculs algébriques :

Proposition 31 - Antisymétrie et bilinéarité. Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de \mathbb{R}^3 , et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
2. $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{v} \wedge \vec{w}$.
3. $\vec{w} \wedge (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{w} \wedge \vec{u} + \beta\vec{w} \wedge \vec{v}$.

Exemple 32 Soient $\vec{u} = (1, -1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Simplifier puis calculer le vecteur $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$.

5 Equations différentielles

Dans cette section on décrit comment résoudre des équations différentielles, c'est-à-dire des équations reliant une fonction et ses dérivées. Plus particulièrement, on s'intéresse aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2, qui interviennent naturellement dans les problèmes de mécanique "avec ressort" ou dans l'étude des circuits RLC.

Définition 33 - Equation différentielle linéaire, ordre 1. Soient $a \in \mathbb{R}$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation de la forme

$$y' + ay = g, \quad (1)$$

où l'inconnue est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Une solution de (1) est donc une fonction f dérivable sur I vérifiant

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + af(t) = g(t).$$

On appelle équation homogène associée à (1) l'équation différentielle

$$y' + ay = 0. \quad (2)$$

Commençons par indiquer comment résoudre l'équation homogène :

Théorème 34 - Solutions de l'équation homogène d'ordre 1. Les solutions de l'équation (2) sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-at},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

 **En pratique**  Les constantes qui apparaissent dans les solutions données peuvent être déterminées par la valeur en un point de la fonction. On parle de *condition initiale* si cette valeur correspond à celle prise en $t = 0$.

Exemple 35 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$. Montrer qu'il existe une unique solution qui vérifie $y(0) = 1$, et la tracer.

Définition 36 - Equation différentielle linéaire, ordre 2. Soient $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme

$$y'' + by' + cy = g, \quad (3)$$

où l'inconnue est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Une solution de (3) est donc une fonction f dérivable sur I vérifiant

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t).$$

On appelle équation homogène associée à (3) l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = 0. \quad (4)$$

Résoudre une équation homogène d'ordre 2 est déjà plus dur :

Théorème 37 - Solution de l'équation homogène d'ordre 2. On appelle équation caractéristique associée à (4) l'équation

$$r^2 + br + c = 0,$$

d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. Les solutions de (4) dépendent du discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles, appelées racines, notées r_1 et r_2 . Les solutions de (4) sont de la forme

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution, appelée racine double. Les solutions de (4) sont de la forme

$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle. Elle a deux racines complexes $\alpha - i\beta$ et $\alpha + i\beta$, où le nombre imaginaire i vérifie $i^2 = -1$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont deux réels. Les solutions de (4) sont de la forme

$$y(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

 **En pratique**  Il faut bien sûr connaître explicitement les solutions de l'équation caractéristique. Vous êtes sensés les savoir dans le cas $\Delta > 0$:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2},$$

ainsi que dans le cas $\Delta = 0$, où $r = -\frac{b}{2}$. Lorsque $\Delta < 0$, c'est peut-être votre première rencontre avec le nombre complexe imaginaire i , nous y reviendrons bientôt, on peut dans un premier temps retenir que les racines sont alors

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2},$$

et donc que α et β sont donnés par

$$\alpha = -\frac{b}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$

Exemple 38

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 5y' - 6y = 0$.
- Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

Le résultat suivant indique l'importance de l'équation homogène dans la stratégie de résolution d'une équation différentielle :

Théorème 39 - Principe de superposition. Considérons une équation différentielle linéaire avec second membre, de la forme (1) ou (3). Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_p . Alors toute autre solution est de la forme

$$y = y_p + y_0,$$

où y_0 est solution de l'équation homogène associée.

En pratique Ainsi, pour résoudre une équation différentielle linéaire, il y a deux étapes bien distinctes : on résout l'équation homogène (voir les méthodes ci-dessus) d'un côté, et on cherche une solution particulière de l'autre côté. On conclut avec le théorème de superposition.

Pour l'instant, nous ne donnons pas de méthode pour trouver une solution particulière. Indiquons simplement que dans le cas de l'équation (1) avec $a \neq 0$, certains cas particuliers sont à savoir :

- Si g est une fonction constante, il y a une solution particulière évidente : $y_p = \frac{g}{a}$. La solution générale est alors de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-at} + \frac{g}{a},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

- Si g est un polynôme, on peut chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré.
- Si g est de la forme $g(t) = P(t)e^{\alpha t}$, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$. Si $\alpha \neq -a$, on prend Q de même degré que P , si $\alpha = -a$, on prend Q de degré $\deg(P) + 1$.
- Si g est une somme de sinusoides, on peut chercher y_p sous la même forme.

Exemple 40

- Résoudre l'équation différentielle $y' + 5y = 7$, avec la condition initiale $y(0) = 2$.
- Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = g$ avec $g(t) = te^t$.
- Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + 5y'(t) - 6y(t) = e^{-t}$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ce^{-t}$.