Chapitre 20 - Intégration

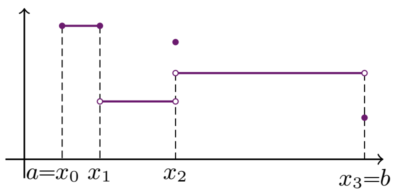
1 Les fonctions en escaliers

Définition 1 - Subdivision d'un segment. On appelle *subdivision du segment* $[a\,,b]$ toute partie FINIE $\{x_k\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a\,,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Définition 2 - Fonction en escaliers, subdivision adaptée.

Une fonction f définie sur un segment $[a\,,b]$ est dite *en escaliers* lorsqu'il existe une subdivision $\{x_k\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a\,,b]$, dite *adaptée à* f, telle que

$$\forall k \in [\![0\,,n-1]\!]\,,\quad f \text{ est constante sur }]x_k\,,x_{k+1}[\,.$$



L'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a\,,b]$ à valeurs réelles est noté $\mathscr{E}([a\,,b],\mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathscr{E}([a\,,b])$.

Remarque 3 - D'autres manières de voir.

- On dit aussi que la subdivision est subordonnée à la fonction en escaliers.
- Une manière de formuler les choses est que pour tout $k \in [\![0\,,n-1]\!]$, chaque fonction $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ est constante.
- Les valeurs $(f(x_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ de la fonction sur les points de la subdivisions vont jouer peu de rôle dans la suite.

Exemple 4 - Fonction partie entière. La partie fonction entière est un exemple de fonction en escalier, tout comme les fonctions constantes.

Définition 5 - Finesse d'une subdivision. Etant donnée deux subdivisions σ et σ' de $[a, b]$, dont dit que σ' est plus fine lorsque ses points sont inclus dans ceux de σ, c'est à dire lorsque $\sigma' \subset \sigma$.

Proposition 6 - Structure des fonctions en escaliers. L'ensemble $\mathscr{E}([a\,,b],\mathbb{R})$ des fonctions en escaliers est un sous-espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, il est de plus stable par produit.

Démonstration. Etant donnée deux fonctions f et g en escalier, et σ_f et σ_g leurs subdivision adaptées, l'idée clef est de trouver une subdvision de $[a, b]$ adaptée à f ET à g. Il faut en construire une plus fine que σ_f et σ_g. Il suffit de prendre l'ensemble de points $\sigma_f \cup \sigma_g$ que l'on réordonne. ■

Remarque 7 - D'autres manières de dire. C'est une manière savante de dire que si f et g sont en escaliers, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier, ainsi que la fonction $f \times g$.

Il est facile de définir l'aire comprise entre une fonction en escalier et l'axe des abcisses :

Définition-Proposition 8 - Aire définie par une fonction en escalier. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$. Etant donnée une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ adaptée à φ, on note λ_k la valeur de φ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors on appelle intégrale de φ entre a et b, noté $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, le nombre suivant :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(x_{k+1}-x_k).$$

Cette quantité représente l'aire comprise entre la courbe de φ et l'axe des abcisses. Il ne dépend pas de la subdivison choisie.

Remarque 9 - Les points de la subdivision. Cette définition « ne voit pas » les valeurs de φ aux point de la subdivision.

2 L'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Nous admettons un lemme très technique, visuellement crédible, mais que nous ne pouvons pas prouver avec nos outils du programme

Lemme 10 - Approximation des fonctions continues par des fonctions en escaliers. Soit $f \in C^0([a,b])$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ telle que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \varphi + \epsilon.$$

Définition-théorème 11 - Intégrale d'une fonction continue. Soit $f \in C^0([a,b])$. Introduisons les deux quantités

$$I_-(f) = \sup\left\{\int_a^b \varphi, \quad \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leqslant f\right\} \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf\left\{\int_a^b \varphi, \quad \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \geqslant f\right\}.$$

Alors ces deux quantités sont égales. Leur valeurs commune est appelée l'intégrale de f entre a et b :

$$I_-(f) = I_+(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On la note aussi $\int_a^b f$, voire $\int_{[a,b]} f$.

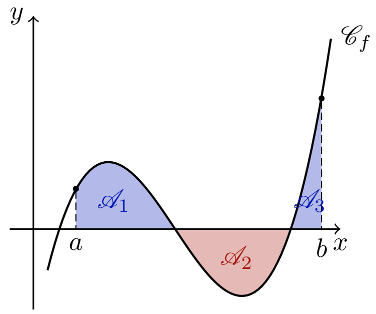
Remarque 12 - Comprendre la définition. La définition ci-dessus des quantités I_- et I_+ est compliquée et demande du recul. Pour $I_-(f)$ par exemple, il s'agit de considéer TOUTES les fonctions en escalier situées sous la courbe de f (c'est un ensemble très grand), et de prendre le sup de leurs intégrales. La subtilité est que si f n'est pas constante, cette borne supérieure n'est pas un maximum, dans le sens où on n'arrive jamais à atteindre ce qu'on pense être l'aire de f avec des fonctions en escalier.
Le résultat crucial est que $I_- = I_+$: en gros on approche f par en-dessous et par au-dessus grâce à des fonctions en escalier (donc, des fonctions dicrétisées), et les aires associées à ces deux approximations se rapprochent d'une valeur commune, toute désignée pour être l'intégrale de f.

Remarque 13 - Une définition non constructive. La définition ci-dessous permet une construction rigoureuse de l'intégrale, et on parle *d'intégrale de Riemann*. Il existe de nombreuses autres approches mathématiques pour des objets plus ou moins similaires. Ici, la définition ne permet pas un calcul explicite de l'intégrale, et nous allons bientôt revenir aux outils de calcul standard.

L'intégrale d'une fonction continue f sur une segment $[a, b]$ représente l'aire ALGÉBRIQUE de la surface délimitée par la courbe de f – ce qui veut dire que les portions de la courbe situées sous l'axe des abscisses contribuent négativement au calcul de l'aire.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3,$$

où $\mathscr{A}_i$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe des abscisses.



Théorème 14 - Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
Soit $[a, b]$ un segment, et $f, g \in C^0([a, b])$

- **(i) Linéarité.** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- **(ii) Positivité.** Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$
- **(iii) Croissance.** Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

✖ **ATTENTION !** ✖ Les résultats ci-dessus donnent des liens entre le signe d'une fonction et son intégrale. Ces liens souvent à sens unique. Par exemple, les raisonnements suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \implies f \geqslant 0 \\ \text{ou encore} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \implies f \leqslant g \end{array}\right. \quad \text{sont FAUX.}$$

Exemple 15 - Intégrale de Wallis (échauffement). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

Théorème 16 - Encadrement d'une intégrale.
Soit $[a, b]$ un segment, et $f, g \in C^0([a, b])$

- **(i) Inégalité triangulaire.** On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$
- **(ii)** Notons $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$. Alors on a $\displaystyle(b-a)m \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$

✎ **En pratique** ✎ La croissance de l'intégrale permet notamment d'encadrer la valeur d'une intégrale a priori, *i.e.* sans la calculer explicitement, en encadrant la fonction intégrée, et d'établir la monotonie de fonctions définies via des intégrales. Cela est particulièrement facile si les fonctions que l'on intègre sont monotones : les valeurs aux bornes permettent alors d'encadrer la fonction !

Exemple 17 Montrer que $\displaystyle 3 \leqslant \int_0^3 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 3\,\mathrm{e}^9.$

Exemple 18 Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g(x) \geqslant \frac{e^x - 1}{x}$. En déduire sa limite lorsque $x \to +\infty$.

Théorème 19 - Nullité avec signe constant.
Si f est CONTINUE et de signe CONSTANT sur $[a, b]$, et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

Dans le théorème précédent, l'hypothèse « f continue » est importante : on peut avoir des fonctions en escaliers non nulles mais d'intégrale nulle.

✖ **Attention !** ✖ L'hypothèse « f de signe constant » est CRUCIALE. Il évident que sans information sur le signe, on peut avoir $\int_a^b f = 0$ sans avoir $f = 0$, pensez à $\int_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t$.

Définition 20 - Généralisation au cas $b \leqslant a$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I et $a, b \in I$.

- Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $a = b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 21 - Relation de Chasles. Soit I un segment et $f, g \in C^0(I)$ alors pour $a, b, c \in I$. Alors on a la **Relation de Chasles :**

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✖ **Attention !** ✖ Pour toutes les propriétés liant intégrale et inégalité, les bornes a et b de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b$ doivent être ordonnées : $a \leqslant b$.

✎ **En pratique** ✎ La relation de Chasles permet notamment de découper les intégrales afin de gérer des questions de signe.

Exemple 22 Montrer que $\displaystyle\int_{-2}^1 |t|\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Définition-Proposition 23 - Valeur moyenne d'une fonction et égalité de la moyenne. Soit $[a, b]$ un segment, et $f \in C^0([a, b])$. Alors la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente la valeur moyenne de f sur le segment $[a, b]$. De plus cette valeur moyenne est atteinte :

$$\exists c \in [a, b], \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

Théorème 24 - Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique.

(i) Soit $a \geqslant 0$ et $f \in C^0([-a,a])$.
Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$, et si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est T-périodique, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

3 Sommes de Riemann

Définition 25 - Sommes de Riemann†. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, alors on appelle *sommes de Riemann associées à la fonction* f, à gauche et à droite respectivement, les deux quantités suivante :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Les sommes intervenant dans la définition sont plus simples à retenir si on comprend leur origine. Si on fixe n et que l'on divise le segment $[a,b]$ en n parties égales, on crée une subdivision, dite *régulière* de $[a,b]$. Les points $(x_k)_{k=0,\dots,n}$ de la subdivision vérifient alors

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},$$

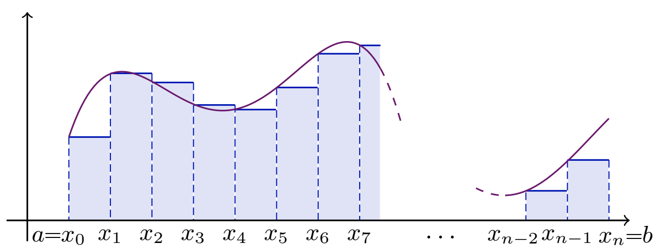
tandis que la quantité $\frac{b-a}{n}$ est appelée le *pas* de la subdivision, et vérifie pour $k \in [\![0\,,n-1]\!]$ la relation $x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n}$.

La somme consiste alors à évaluer la fonction sur chaque point de la subdivision, et à multiplier le tout par le pas. Si on ouvre les yeux, on voit qu'une somme de Riemann associée à f est en fait l'intégrale d'une fonction en escalier qui est construite comme une discrétisation de f, avec un échantillonnage régulier. Vous avez deviné le théorème :

Théorème 26 - Convergence des sommes de Riemann (ou méthode des rectangles). Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, alors les sommes de Riemann de f convergent vers l'intégrale de f sur $[a,b]$:

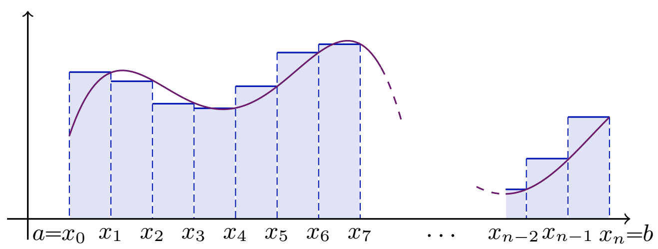
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce théorème est clair géométriquement (et a son analogue pour une somme de Riemann à droite), en notant que lorsque $n \to +\infty$, on a le pas de la subdivision qui tend vers 0, ce qui correspond à un échantillonnage de plus en plus précis.



L'aire du domaine coloré vaut $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

L'aire du domaine coloré vaut $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.



Exemple 27 Reconnaître une somme de Riemann et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

†. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 à Breselenz – 1866 à Selasca) est un mathématicien allemand qui a notamment construit une théorie rigoureuse de l'intégrale d'une fonction.

Exemple 28 Reconnaître une somme de Riemann et calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

✎ **En pratique** ✎ Les sommes de Riemann peuvent servir à calculer des limites de somme où le nombre de termes apparaît dans les termes. La proximité d'une quantité de la forme « $\frac{k}{n}$ » doit vous mettre la puce à l'oreille.

Remarque 29 L'approximation de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'une des deux sommes $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ ou $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ s'appelle la *méthode des rectangles*, cette dernière fournit un procédé de calcul numérique des intégrales. On peut se demander la qualité de l'approximation, et le résultat suivant répond à la question dans le cas où f est de classe C^1, il fournit en outre une preuve du théorème de convergence des sommes de Riemann :

Théorème 30 - Méthode des rectangles dans le cas C^1. Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, et $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(t)|$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

Démonstration. Par hypothèse, f' est continue sur le segment $[a\,,b]$ et y est donc bornée, en vertu du théorème des bornes atteintes, disons $|f'| \leqslant K$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x\right| && \text{(Chasles)}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k|\,\mathrm{d}x && \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K\,(x-x_k)\,\mathrm{d}x && \text{(IAF et positivité de l'intégrale)}\\
&= K\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&= \frac{K(b-a)^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion par encadrement. ■

Remarque 31 Il existe des manières plus pécises d'approcher une intégrale par des sommes, la suivante sur la liste étant la *méthode des trapèzes*.

4 Lien avec les primitives : le « calcul intégral ».

Dans cette section quasiment rien de nouveau par rapport au chapitre sur les primitives (si ce n'est que nous allons démontré la relation fondamentale entre les primitives et les intégrales d'une fonction). C'est surtout l'occasion de réviser nos techniques de calculs d'intégrales.

4.1 Lien fondamental entre primitives et intégrales

On rappelle qu'étant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, une primitive de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie $F' = f$. De plus, si F est une primitive de f sur I, alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, sont aussi des primitives (« toutes les pimitives sur un intervalle diffèrent d'une constante »).

Théorème 32 - Théorème fondamental de l'analyse.

(i) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f \in C^0(I, \mathbb{K})$ une fonction continue sur I. Soit $a \in I$, et soit $F_a : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Alors F_a est dérivable sur I, et il s'agit de l'unique primitive de f qui s'annule en a, elle vérifie donc
$$\forall x \in I, \quad F_a'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad F_a(a) = 0.$$

(ii) En particulier, toute fonction continue admet des primitives.

Ce théorème est redoutable car il est utile dans les deux sens :

- Il fournit des primitives à partir des intégrales d'une fonction, essentiel pour résoudre des équation différentielles,
- Il fournit des méthodes pour calculer des intégrales à partir des primitives, voir ci-dessous.

Pensez à une primitive comme à une intégrale avec une borne variable.

Exemple 33 La fonction définie par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$.

Théorème 34 - Théorème fondamental du calcul intégral. soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$, et F une primitive de f. Alors on a
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemple 35 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $]0, 1]$. Calculer $\int_\epsilon^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t$, puis la limite de cette intégrale lorsque $\epsilon \to 0$.

Pour une fonction f de classe C^1, on a une version qui relie f et sa dérivée :

Corollaire 36 - Formule fondamentale de l'analyse. soit $f \in C^1(I, \mathbb{K})$, et $a \in I$. Alors
$$\forall x \in I, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 37 - Ne cherchez pas en vain. Attention, toutes les fonctions continues ont une primitive, mais celles-ci ne s'expriment pas forcément avec vos fonctions usuelles. Ainsi, les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ ou $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ont des primitives, mais on peut démontrer qu'il n'y a pas de formule explicite !

4.2 Techniques de calculs

On renvoit aux techniques de calculs vues précédemment :

- Techniques de calculs de primitives en reconnaissant des dérivées de fonctions usuelles ou de leurs composées.
- Intégration par partie.
- Changement de variable.

Plutôt que de répéter des énoncés déjà vus, assurons-nous que nous savons mettre en place ces techniques avec des exercices d'applications.

Commençons par un rappel : étant donnée une fonction u dérivable, on a le tableau des primitives suivantes

	Composée	UNE primitive sur I	Condition sur u
1	$u'u^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	u^α définie
2	$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u	aucune
3	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u de signe CONSTANT sur I
4	$u'\sin u$	$-\cos u$	aucune
5	$u'\cos u$	$\sin u$	aucune
5	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{Arctan}\, u$	aucune

Exemple 38

- Calculer $\int_0^1 \dfrac{5t^3}{\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$.
- Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \dfrac{1}{4t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
- **A connaître par cœur !** Pour tout réel a non nul, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ est $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a}$.

Les techniques de décomposition en éléments simples restent fondamentales ! Vérifiez vos acquis :

Exemple 39

- Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{3x^2-x+1}$ sur un domaine de définition à déterminer.
- Déterminer pour $a>1$ la valeur de $\int_a^2 \frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. Que vaut la limite lorsque $a \to 1^+$?

Si tout va bien, vous n'avez pas non plus oubliez les techniques de linéarisation ou pour les mélanges trigo-polynôme :

Exemple 40

- Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto (\sin x)^2 \times \cos(4x)$
- Calculer $\int_0^1 \cos(2x)e^{-3x}\,\mathrm{d}x$.

Remarque 41 - Recommandation finale. Puisque dériver est souvent plus facile que primitiver, il est vivement recommandé lorsque l'on a déterminé une primitive F d'une fonction f de vérifier son calcul en s'assurant que $F' = f$, autrement dit en dérivant la primitive trouvée F, dont la dérivée doit être f.

Exemple 42 Montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Exemple 43 - Retrouver une primitive de ln. $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$ est une primitive de ln sur $]0\,,+\infty[$ (celle qui s'annule en 1) et, pour tout réel $x>0$, on peut calculer cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

En effet, les fonction $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \ln t$ sont de classe C^1 sur $[0\,,x]$, ainsi, par intégration par parties,

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - 0 - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_{t=1}^{t=x} = x\ln x - (x-1) = x\ln x - x + 1.$$

Exemple 44 Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$, c'est-à-dire à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \sin t$.

Exemple 45 Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \cos t$.
On écrit

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\left(1-\cos^2 t\right)}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui suggère de poser $x = \cos t$, *i.e.* $\varphi = \cos$, et donc $f : x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Ainsi, puisque φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' = -\sin$, il vient

$$J = -\int_1^0 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \left(\frac{2}{1+x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = -\left[2\operatorname{Arctan} x - x\right]_1^0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exemple 46 - Changement de variable affine. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
La fonction $h : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \dfrac{f(x)-h(x)}{x}$.

5 Formules de Taylor

Pour une fonction de classe C^n sur un intervalle I, nous avons déjà vu la formule de Taylor-Young, qui est la formule générique d'un développement limité. Pour $a \in I$, cette formule s'énonce, lorsque $x \to a$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Cette formule est locale, et ne donne des informations pertinentes que « lorsque x est proche de a », car c'est dans ce régime que l'on peut utiliser le fait ue le reste est « $o((x-a)^n)$ ».

Les formules de Taylor que nous allons voir sont globales. Commençons par la plus riche de toute :

Proposition 47 - Formule de Taylor avec reste intégrale (non exigible). Soit $f \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Alors on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule n'est pas exigible, mais il est intéressant de savoir qu'elle existe : le reste de la formule de Taylor-Young est maintenant explicite, et la formule donne une égalité valable pour tout $x \in I$, qui est pertinente même lorsque x est « loin » de a. En fait cette formule mesure de manière exacte à quel point f est loin de son développement limité en a.

Remarque 48 - Lien avec la formule du calcul intégrale. La formule fondamentale de l'analyse vue ci-dessus est en fait la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 0.

Proposition 49 - Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $f \in C^{n+1}(I)$. Soit $a \in I$ et $x \in I$. Notons $M = \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}|$. Alors on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette formule est moins précise que celle avec reste intégrale car elle ne fournit qu'une inégalité, mais elle est plus facile à appliquer car il suffit de majorer la dérivée $n+1$-ième pour obtenir un résultat quantitatif.

Remarque 50 - Lien avec la formule du calcul intégrale. Si $n = 0$, il s'agit de l'inégalité des accroissements finis !

✎ **En pratique** ✎ De nombreux exercices vous demandant de montrer des inégalités sont en fait des applications directes d'une inégalité de Taylor-Lagrange, là où une démontrsation manuelle serait laborieuse

Exemple 51 - Un encadrement précis. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin x - (x - \frac{x^3}{6})\right| \leqslant \frac{|x|^5}{120}.$$

Raffiner cela en montrant que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exemple 52 - Une étrange somme alternée. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

En reconnaissant un développement de Taylor du catalogue, montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donnez sa limite.

6 Intégrale des fonctions de la variable complexe

Ce chapitre popose une brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Comme toujours, ce sont les mêmes mécanismes :

- Les définitions passent par les parties réelles et imaginaires, et le nombre i est vu comme une constante.
- Le module remplace la valeur absolue,
- Les théorèmes avec des inégalités sur les fonctions ne tiennent plus.

Définition 53 - Lien avec la formule du calcul intégrale. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$, alors on définit

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

Exemple 54 - Surtout pas de logarithme complexe. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t - i}.$$

Théorème 55 - Résultats pour les intégrales à valeur complexe. Les théorèmes suivants restent vrais dans le cadre de l'intégrale à valeur complexes :

- La linéarité de l'intégrale
- L'inégalité triangulaire (à l'aide du module),
- La règle de Chasles.

Corollaire 56 - Inégalité de Taylor-Lagrange. L'inégalité de Taylor-Lagrange reste vraie pour les fonctions à valeurs complexes, avec le module à la place de la valeur absolue pour les quantités complexes.

✖ **Attention !** ✖ Attention à ne pas tout mélanger : les fonctions restent définies sur des intervalles réelles, et on ne considère pas des fonctions de la variable complexe, qui forment un cadre beaucoup plus difficile

Exemple 57 - Développement en série de l'exponentielle... y compris complexe !. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = e^{tz}.$$

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et 1, et en déduire que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$