

# Chapitre 21 - Applications linéaires

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne l'un des ensembles de nombres  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Définitions et premiers exemples

### 1.1 Différents types d'applications linéaires

**Définition 1 - Application linéaire.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de  $E$  dans  $F$*  toute application  $f : E \rightarrow F$  qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Cas particulier où  $E = F$ .** Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est aussi appelée un *endomorphisme de  $E$* . L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

**Cas particulier où  $F = \mathbb{K}$ .** Une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  est aussi appelée une *forme linéaire sur  $E$* .

**Cas particulier où  $f$  est bijective.** Une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$  est aussi appelée un *isomorphisme de  $E$  dans (ou sur)  $F$* .

**Remarque 2** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Remarquons que :  $f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(0_E) = 0_F$ , ainsi  $f(0_E) = 0_F$ .
- Si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $f|_A$  est aussi linéaire sur  $A$ , i.e. un élément de  $\mathcal{L}(A, F)$ .
- Par récurrence immédiate sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a, pour tous  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ ,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

#### Exemple 3

- L'application  $(x, y) \mapsto (x, x + y, x - 2y)$  de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  fixé, les applications de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$  (appelées : multiplications par  $A$ ).
- L'application  $(x, y) \mapsto x + y + 1$  de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour tout intervalle  $I$ , l'application  $f \mapsto f'$ , de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Et de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ?
- L'application  $x \mapsto \cos(x)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- L'application  $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$
- L'application  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}$ .

### 1.2 Opérations sur les applications linéaires

**Théorème 4 - Espace vectoriel des applications linéaires.** Soit  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, c'est-à-dire que si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , alors

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F).$$

*Démonstration.* ... ■

**Théorème 5 - Composition d'applications linéaires.** Soit  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

*Démonstration.* ... ■

**Exemple 6** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'application  $\varphi : M \mapsto AM - MA$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
**En effet**, les applications  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$  sont linéaires, donc  $\varphi$  aussi par différence.

**Exemple 7** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'application  $\varphi : M \mapsto AM - MA$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
**En effet**, les applications  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$  sont linéaires, donc  $\varphi$  aussi par différence.

**Théorème 8 - Opérations sur les isomorphismes.** Soit  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (i) **Composition.** Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  et  $g$  un isomorphisme de  $F$  sur  $G$ , alors  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ .
- (ii) **Réciproque.** Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ , alors  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $E$ .

*Démonstration.* ... ■

**Définition 9 - Espaces vectoriels isomorphes.** On dit que deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme  $E$  dans  $F$ .

Ainsi, d'après la proposition précédente, la relation entre espaces vectoriels « être isomorphe à » est notamment transitive.

## 2 Image et noyau

### 2.1 Image d'un sous-espace vectoriel

La proposition suivante est l'occasion de réviser la notion d'image directe :

**Proposition 10 - Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour tout sous-espace vectoriel  $A$  de  $E$ , l'image  $f(A)$  de  $A$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

Pour une application linéaire, cette notion est particulièrement importante lorsque  $A = E$  :

**Définition-théorème 11 - Image d'une application linéaire.**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble  $\text{Im } f = f(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , appelé l'*image* de  $f$ . On a donc

$$\text{Im } f = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On peut lire la surjectivité de  $f$  sur son image :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F \iff \text{Im } f = F.$$

*Démonstration. ...* ■

**Exemple 12** L'image de l'endomorphisme  $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$  de  $\mathbb{K}^3$  est le plan d'équation  $z = x$ . En particulier,  $\text{Im } f \neq \mathbb{K}^3$  et  $g$  n'est pas surjectif.

**En effet**, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ ,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Im } g &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, \quad (x, y, z) = g((a, b, c)) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, \quad \begin{cases} a + 2b + c = x \\ 2a + b - c = y \\ a + 2b + c = z \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, \quad \begin{cases} a + 2b + c = x \\ 3b + 3c = 2x - y & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 0 = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff z = x. \end{aligned}$$

En effet, si  $z \neq x$ , le système n'a clairement pas de solution, et si  $z = x$ , on obtient facilement des solutions en utilisant  $c$  comme paramètre.

**Théorème 13 - Image d'une famille génératrice.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(x_i))_{1 \leq i \leq n}$ .

**En pratique** Ce résultat nous dit comment déterminer en pratique  $\text{Im } f$  : il suffit d'évaluer  $f$  sur une base. C'est là toute la force des application linéaire, et ce n'est que le début, car cette idée va revenir en force. Si on compare avec des fonctions quelconques, par exemple une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour laquelle on a besoin de tout le graphe pour décrire la fonction, il est impressionnant que l'on puisse comprendre une application linéaire à partir d'un nombre fini de valeurs.

**Exemple 14** On note  $f$  l'application linéaire  $(x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 5y, y)$  de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}^3$ . Alors  $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$  est une base de  $\text{Im } f$ . En particulier,  $\text{Im } f \neq \mathbb{K}^3$  et  $f$  n'est pas surjective.

**Exemple 15** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'image de la dérivation  $\Delta$  des polynômes sur  $\mathbb{K}_n[X]$  est  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

## 2.2 Noyau d'une application linéaire

**Proposition 16 - Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour tout sous-espace vectoriel  $B$  de  $F$ , l'image réciproque  $f^{-1}(B)$  de  $B$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration. ...* ■

**Définition-théorème 17 - Noyau d'une application linéaire.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle *noyau* de  $f$  et on note  $\text{Ker } f$  l'ensemble :

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Il s'agit là d'un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
On peut lire l'injectivité de  $f$  sur son noyau :

$$f \text{ est injective sur } E \iff \text{Ker } f = \{0_E\}.$$

Le noyau de  $f$  est l'ensemble des solutions de l'ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE  $f(x) = 0_F$ , d'inconnue  $x \in E$ . D'une certaine manière,  $\text{Ker } f$  est l'ensemble des éléments de  $E$  que  $f$  ne « voit » pas. En effet, pour tous  $x \in E$  et  $k \in \text{Ker } f$ ,  $f(x + k) = f(x)$ , par linéarité. Ainsi,  $\text{Ker } f$  mesure le défaut d'injectivité de  $f$ .

*Démonstration.* ... ■

**En pratique** En tant que sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\text{Ker } f$  contient  $0_E$ . Ainsi, pour établir que  $f$  est injective, il suffit de montrer l'INCLUSION  $\text{Ker } f \subset \{0_E\}$ , c'est-à-dire

$$f(x) = 0_F \implies x = 0_E.$$

**Exemple 18** La dérivation polynomiale  $P \xrightarrow{\Delta} P'$  sur  $\mathbb{K}[X]$  a pour noyau  $\text{Ker } \Delta = \mathbb{K}_0[X]$  et en particulier n'est pas injective.

**Exemple 19** Soit  $f$  l'application linéaire  $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y)$  de  $\mathbb{K}^3$  dans  $\mathbb{K}^2$ . Alors  $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, 1, 3))$  et en particulier  $f$  n'est pas injective.

**En pratique** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors

$$\text{Ker } f|_A = A \cap \text{Ker } f.$$

**Remarque 20** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour tout scalaire non nul  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on a  $\text{Ker } f = \text{Ker } (\lambda f)$ , égalité qui découle de l'équivalence

$$f(x) = 0_F \iff_{\lambda \neq 0} \lambda f(x) = 0_F.$$

Par contre, si  $g \in \mathcal{L}(E, F)$  est une autre application linéaire, il n'y a pas de lien directe entre  $\text{ker}(f + g)$ ,  $\text{ker}(f)$  et  $\text{ker}(g)$ .

**En pratique** Pour tout  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ ,  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

## 2.3 Rang d'une applicaion linéaire

**Définition 21 - Application linéaire de rang fini, rang.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- On dit que  $f$  est de *rang fini* lorsque  $\text{Im } f$  est de dimension finie, et de *rang infini* sinon.
- Si  $f$  est de rang fini, on appelle *rang de  $f$* , noté  $\text{rg } f$ , la dimension de  $\text{Im } f$ .

Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont heureusement pas sans rapport. Dans le cas où  $E$  est de dimension finie non nulle et admet  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  pour base,  $f$  est de rang fini et

$$\text{rg } f = \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Vect}(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}) = \text{rg}(f(e_i))_{1 \leq i \leq n},$$

en particulier  $\text{rg } f \leq n = \dim E$ . Cette inégalité sera précisée par la formule du rang ci-après.

**Remarque 22** Si  $F$  est de dimension finie, le rang de toute application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est fini et inférieur ou égal à  $\dim F$ , avec égalité si et seulement si  $f$  est surjective.

**Proposition 23 - Rang d'une composée.** Soit  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$ .

Le résultat suivant peut-être précisé lorsque l'on compose par un isomorphisme :

**Proposition 24 - Invariance du rang par composition par un isomorphisme.** Soit  $E, F, E', F'$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- (i) Pour tout isomorphisme  $\varphi$  de  $E'$  sur  $E$ ,  $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg } f$ .
- (ii) Pour tout isomorphisme  $\psi$  de  $F$  sur  $F'$ ,  $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg } f$ .

*Démonstration.* ... ■

### 3 Endomorphismes : spécificités et cas particuliers

#### 3.1 Composer des endomorphismes

On rappelle qu'un endomorphisme est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ , et que l'on note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes. Si on  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on peut composer l'endomorphisme  $f$  avec lui-même et adopter les notations conventionnelles suivantes.

On rappelle que l'application identité de  $E$ , notée  $\text{Id}_E$ , est définie de  $E$  dans  $E$  par

$$\text{Id}_E : x \mapsto x.$$

**Définition 25 - Homothétie.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On appelle *homothétie de  $E$  de rapport  $\lambda$*  l'application  $\lambda \text{Id}_E$ , i.e.  $\begin{cases} E \longrightarrow E, \\ x \longmapsto \lambda x. \end{cases}$  Cette application est un endomorphisme de  $E$ .

**En pratique** Encore du vocabulaire! Pensez à l'éthymologie pour retenir les noms :

- « Morphisme » : transformation, une opération qui transforme une opération (en une autre...).
- que l'on décline avec « endo » : à l'intérieur (se passe de commentaires) et « iso » : même, vient du fait que deux espace vectoriel reliés par une bijection ont beaucoup de points communs (points que nous allons développer).
- « Homothétie » : même rapport. Prenez l'exemple d'une homothétie de  $\mathbb{R}^2$ , il est clair qu'elle conserve les angles entre deux vecteurs.

Dans le cas où  $E = F$ , on peut composer l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec lui-même et adopter les notations conventionnelles suivantes.

**Définition 26 - Puissance d'un endomorphisme, polynôme (annulateur) d'endomorphisme.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f$  un endomorphisme de  $E$ ,  $n$  un entier naturel. La *puissance  $n^e$  de l'endomorphisme  $f$* , notée  $f^n$ , est l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}, \text{ si } n > 0.$$

**Exemple 27** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^2$  défini par  $f : (x, y) \mapsto (x+y, 2y)$ , alors  $f^2$  et  $f^3$  sont les endomorphismes de  $\mathbb{K}^2$  définis par :

$$f^2 : (x, y) \mapsto f(f((x, y))) = f((x + y, 2y)) = (x + y + 2y, 2(2y)) = (x + 3y, 4y),$$

$$f^3 : (x, y) \mapsto f(f^2((x, y))) = f((x + 3y, 4y)) = (x + 3y + 4y, 2(4y)) = (x + 7y, 8y)$$

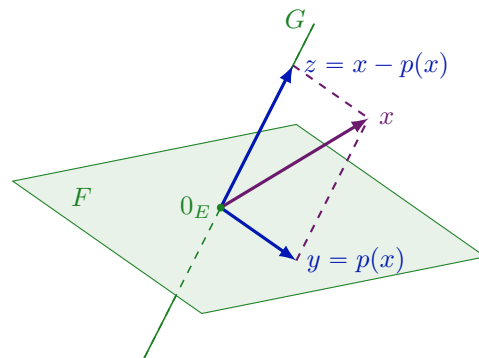
**Remarque 28 - Formule du binôme.** La formule du binôme est vraie dans  $\mathcal{L}(E)$ . Précisément, pour deux endomorphismes  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  qui COMMUTENT,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

### 3.2 Projecteurs

**Définition 29 - Projecteur.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Tout élément  $x \in E$  s'écrit alors d'une et une seule façon comme la somme d'un élément  $y \in F$  et d'un élément  $z \in G$ , de sorte que  $x = y + z$ .

Avec ces notations, l'application  $p$  de  $E$  dans  $E$  qui à  $x$  associe  $p(x) = y$  est appelée la *projection sur  $F$  parallèlement à  $G$*  ou encore le *projecteur sur  $F$  de direction  $G$* .



**Exemple 30** La projection de  $\mathbb{R}^3$  sur le plan  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  parallèlement à la droite  $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$  est l'application linéaire  $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$ .

**En effet**, nous allons commencer par établir la supplémentarité de  $F$  et  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$ , le reste en découlant aisément. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , pour tous  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a, b, c) + \lambda(1, 1, 1) \text{ et } (a, b, c) \in F \\ \iff \begin{cases} a + \lambda = x \\ b + \lambda = y \\ c + \lambda = z \\ a + b + c = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a + \lambda = x \\ b + \lambda = y \\ c + \lambda = z \\ \lambda = \frac{1}{3}(x + y + z) \quad L_4 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3 - L_4) \end{cases} \\ \iff (a, b, c) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \text{ et } \lambda = \frac{1}{3}(x + y + z), \end{aligned}$$

ce qui établit la supplémentarité de  $F$  et  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Or le projeté de  $(x, y, z)$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est par définition le vecteur  $(a, b, c)$  et la projection est donc

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

(A minima, on peut ici vérifier que les coordonnées de  $\frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$  satisfont bien l'équation définissant  $F$ .)

**Théorème 31 - Propriétés des projecteurs.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . La projection  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $p^2 = p$ . En outre,

$$F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\} \quad \text{et} \quad G = \text{Ker } p.$$

Autrement dit,  $F = \text{Im } p$  est l'espace des vecteurs invariants par  $p$ .

*Démonstration.*

- **Endomorphisme de  $E$ .** Par définition,  $p$  est à valeurs dans  $E$ . Soit  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$  et  $x, x' \in E$ , notons  $x = y + z$  et  $x' = y' + z'$  avec  $y, y' \in F$  et  $z, z' \in G$  LES décompositions respectives de  $x$  et  $x'$  selon la somme directe  $E = F \oplus G$ . On a alors

$$\lambda x + \lambda' x' = \underbrace{\lambda y + \lambda' y'}_F + \underbrace{\lambda z + \lambda' z'}_{\in G}$$

ainsi, par unicité d'une telle écriture et par définition de  $p$ ,

$$p(\lambda x + \lambda' x') = \lambda y + \lambda' y' = \lambda p(x) + \lambda' p(x'),$$

ce qui établit la linéarité de  $p$ .

- **$p^2 = p$ .** Soit  $x \in E$  et  $(y, z) \in F \times G$  tel que  $x = y + z$ , alors  $p(x) = y = y + 0_E$ , avec  $y \in F$  et  $0_E \in G$ , ainsi

$$p^2(x) = p(p(x)) = y = p(x).$$

- **Image et noyau.** Par définition de  $p$ ,

$$\text{Im } p \subset F \subset \{x \in E \mid p(x) = x\} \subset \text{Im } p$$

et ces inclusions sont donc des égalités. Observons en outre que

$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - x = 0_E\} = \{x \in E \mid (p - \text{Id}_E)(x) = 0_E\} = \text{Ker } (p - \text{Id}_E).$$

On procède de même pour  $G = \text{Ker } p$  :

$$\text{Ker } p \subset G \subset \{x \in E \mid p(x) = 0_E\} = \text{Ker } p.$$

En effet,

- ★ soit  $x \in \text{Ker } p$ , alors  $x = y + z$  avec  $(y, z) \in F \times G$  et  $0_E = p(x) = y$ , ainsi  $x = z \in G$ ;
- ★ soit  $x \in G$ , alors  $x = 0_E + x$  avec  $0_E \in F$  et  $x \in G$  et on a donc  $p(x) = 0_E$ , soit  $x \in \text{Ker } p$ .

■

**Théorème 32 - Caractérisation des projecteurs.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  un ENDOMORPHISME de  $E$ .

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p^2 = p.$$

Le cas échéant,  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont supplémentaires dans  $E$  et  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ . Concrètement, pour tout  $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker } p}.$$

✗ **ATTENTION ! ✗** On rappelle que  $p^2 = p \circ p$ . Il ne faut pas omettre de mentionner/vérifier la linéarité de  $p$  avant d'utiliser cette caractérisation.

*Démonstration.* Le sens direct correspond au théorème précédent, ainsi seule la réciproque reste à prouver. Supposons donc que  $p^2 = p$  et commençons par montrer par analyse-synthèse que  $\text{Im } p$  et  $\text{Ker } p$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- **Analyse.** Soit  $x \in E$ . Supposons qu'il existe  $(a, b) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$  tel que  $x = a + b$ . Il existe alors  $c \in E$  tel que  $b = p(c)$  et on a donc

$$b = p(c) = p^2(c) = p(p(c)) = p(b) = p(x),$$

puisque, par linéarité de  $p$ ,  $p(x) = p(a) + p(b) = p(b)$ . Enfin  $a = x - b = x - p(x)$ . Ainsi, sous réserve d'existence,  $a$  et  $b$  sont uniques.

- **Synthèse.** Soit  $x \in E$ . Posons  $a = x - p(x)$  et  $b = p(x)$ . Par construction  $x = a + b$  et  $b \in \text{Im } p$ . En outre, par linéarité de  $p$  et sachant  $p^2 = p$ ,

$$p(a) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E,$$

soit  $a \in \text{Ker } p$ .

Nous avons donc établi que  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$  et obtenue la décomposition correspondante de  $x$  :

$$x = p(x) + (x - p(x)).$$

Ainsi  $p(x)$  est le projeté de  $x$  sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ , par définition d'une projection. ■

**Exemple 33 - Projecteur sur une droite.** Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur de norme 1. Montrer que l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

est un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Donner son image (et son rang), et son noyau. Est-ce spécifique à  $\mathbb{R}^3$  ?

### 3.3 Symétries

L'approche des pour définir et comprendre les symétries est la même que pour les projecteurs.

**Définition 34 - Symétrie.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Tout élément  $x \in E$  s'écrit alors d'une et une seule façon comme la somme d'un élément  $y \in F$  et d'un élément  $z \in G$ , de sorte que  $x = y + z$ .

Avec ces notations, l'application  $s$  de  $E$  dans  $E$  qui à  $x$  associe  $s(x) = y - z$  est appelée la *symétrie dans la direction  $G$  par rapport à  $F$* .

**Remarque 35 - Lien entre symétries et projecteurs.** Sous les hypothèses précédentes, si on note  $p_1$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $p_2$  le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ , alors on a  $s = p_1 - p_2$ .

De manière très similaire à la caractérisation des projecteurs :

**Théorème 36 - Caractérisation des symétries.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $s$  un ENDOMORPHISME de  $E$ .

$s$  est une symétrie si et seulement si  $s^2 = \text{Id}_E$ .

Le cas échéant,  $\ker(s - \text{Id}_E)$  et  $\ker(s + \text{Id}_E)$  sont supplémentaires dans  $E$  et  $s$  est la symétrie dans la direction  $\ker(s + \text{Id}_E)$  par rapport à  $\ker(s - \text{Id}_E)$ . Concrètement, pour tout  $x \in E$

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \ker(s - \text{Id}_E)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \ker(s + \text{Id}_E)}.$$

**Exemple 37 - Symétrie depuis un projecteur.** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $\text{Id}_E - p$  est une symétrie. Donner ses éléments géométriques à partir de ceux de  $p$ .

Appliquer cela au cas du projecteur sur une droite décrit dans l'exercice 33.

**✗ ATTENTION ! ✗** Vous êtes à un carrefour de votre compréhension conceptuelle de l'algèbre (et des mathématiques). Nous avons défini les projecteurs et les symétries comme des applications linéaires particulières, mais elles restent des objets très généraux ! Ne croyez pas que tous les projecteurs projettent sur une droite. Par exemple, les applications identité  $\text{Id}_E$  et nulle  $x \mapsto 0_E$  sont elles-aussi des projecteurs ! N'essayez pas de comprendre les projecteurs dans leur ensemble, mais d'avoir une approche globale qui consiste à réunir des fonctions ayant des points communs.

### 3.4 Endomorphismes bijectifs

**Définition 38 - Automorphismes.** Un isomorphisme de  $E$  sur  $E$  est aussi appelé un *automorphisme de  $E$* . L'ensemble des automorphismes de  $E$  est noté  $\text{GL}(E)$  et appelé le *groupe linéaire de  $E$* .

**Exemple 39** L'application  $f : (x, y) \mapsto (3x + y, 5x + 2y)$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}^2$  et admet pour réciproque  $(x, y) \mapsto (2x - y, -5x + 3y)$ .

**Définition-Proposition 40 - Structure des automorphismes.**

- L'application  $\text{Id}_E$  dans dans  $\text{GL}(E)$ ,
- Pour tout  $f$  et  $g$  dans  $\text{GL}(E)$ , on a  $g \circ f \in \text{GL}(E)$ .
- Pour tout  $f \in \text{GL}(E)$ , on a  $f^{-1} \in \text{GL}(E)$ .

En particulier pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f^k \in \text{GL}(E)$ , où pour un entier  $k < 0$ , on a posé  $f^k = (f^{-1})^k$ .



## 4 Détermination d'une application linéaire en dimension finie.

Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels vus dans cette section sont de dimension finie.

Pour connaître une application en général, on n'a d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques.

**Exemple 41** On connaît parfaitement l'application  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, 3x - z)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  si l'on sait qu'elle est LINÉAIRE et si l'on sait que  $f((1, 0, 0)) = (2, 3)$ ,  $f((0, 1, 0)) = (1, 0)$  et  $f((0, 0, 1)) = (1, -1)$ .

**En effet**, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) && \text{(linéarité)} \\ &= x(2, 3) + y(1, 0) + z(1, -1) \\ &= (2x + y + z, 3x - z). \end{aligned}$$

Le théorème qui suit, fondamental et impressionnant, généralise ce principe.

**Théorème 42 - Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si  $E$  possède une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors, pour toute famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $F$ , il existe une et une seule application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(e_i) = f_i$ .

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

*Démonstration. ...* ■

Le théorème suivant complète le précédent. Une application linéaire est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur une base et nous pouvons en tirer une nouvelle caractérisation claire de l'injectivité et de la surjectivité.

**Théorème 43 - Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  possède une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

- (i)  $f$  est surjective de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  engendrent  $F$ .
- (ii)  $f$  est injective sur  $E$  si et seulement si  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est libre.
- (iii)  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $F$ .

*Démonstration. ...* ■

**Théorème 44 - Classification des espaces vectoriels de dimension finie.**

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est de dimension finie non nulle  $n$  si et seulement s'il est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

**Corollaire 45** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

$$E \text{ est isomorphe à } F \quad \iff \quad \dim E = \dim F.$$

**Exemple 46** La transposition des matrices définit un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . En particulier,  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est isomorphe  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ , ce qui légitime l'identification de tout vecteur de  $\mathbb{K}^n$  avec une matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

**Théorème 47 - Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies.**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de MÊME DIMENSION FINIE et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est injective.}$$

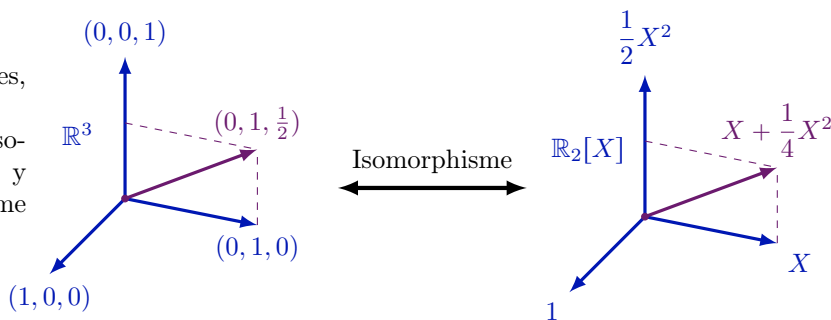
En particulier, ces équivalences valent pour un endomorphisme en dimension FINIE.

**✗ ATTENTION ! ✗** Le théorème précédent ne dit pas que « bijectif = injectif = surjectif » en algèbre linéaire ! Il affirme seulement que ces propriétés se confondent lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont MÊME DIMENSION FINIE.

**En pratique** Ce théorème est relié à celui sur les familles libres et génératrices quand le cardinal vaut la dimension, et est tout aussi pratique : il divise par deux le travail à faire pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme, à condition que les espaces de départ et d'arrivée aient la même dimension.

**Exemple 48** Montrer en un clin d'oeil que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  sur  $\mathbb{K}^{n+1}$ . On peut montrer que sa réciproque est  $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} X^k$  (formule de Taylor polynomiale en 0).

En particulier,  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}_2[X]$  sont isomorphes, i.e. « identiques » en tant qu'espaces vectoriels. La figure ci-contre illustre la manière dont cet isomorphisme « géométrise » l'espace  $\mathbb{R}_2[X]$ . On y associe à tout triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  le polynôme  $a + bX + \frac{c}{2}X^2$ .



**Exemple 49** Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  fixé. Soit  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites, et  $S$  le sous-ensemble de  $E$  défini par

$$S = \{(u_n) \in E, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}.$$

1. Montrer que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que  $f : S \rightarrow \mathbb{K}^2$  définie par  $f((u_n)) = (u_0, u_1)$  est une application linéaire bijective.
3. En déduire la dimension de  $S$ .

**Exemple 50 - Inversibilité à gauche ou à droite implique inversible.** On rappelle que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont supposés de dimension finis.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $f$  a un inverse à gauche, c'est-à-dire qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  vérifiant

$$g \circ f = \text{Id}_E,$$

Alors  $f$  est bijective, et on a  $g = f^{-1}$ .  
On a un résultat similaire si  $f$  a un inverse à droite.

L'exemple précédent indique que pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme, il suffit de chercher un inverse à gauche ou à droite, sans vérifier l'autre morceau.

**Théorème 51 - Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires.** Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$ .

Démonstration. ...



**Proposition 52 - Recollement d'applications linéaires.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels avec  $E = E_1 \oplus E_2$ . Soient  $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$  et  $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$u|_{E_1} = u_1 \quad \text{et} \quad u|_{E_2} = u_2.$$

**Lemme 53 - Théorème du rang, version longue.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\text{Ker } f$  possède un supplémentaire  $H$  dans  $E$ , alors la restriction de  $f$  à  $H$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $\text{Im } f$ . On dit que  $f$  induit un isomorphisme de  $H$  sur  $\text{Im } f$ .

*Démonstration. ...* ■

**Théorème 54 - Théorème (ou Formule) du rang.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  est DE DIMENSION FINIE, alors

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f).$$

En particulier,  $\text{rg } f \leq \dim E$ .

L'hypothèse «  $E$  est de dimension finie » garantit en particulier que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  le sont aussi. Le théorème du rang indique que

Si je connais le noyau, je connais un peu l'image et vice versa.

*Démonstration. ...* ■

**Exemple 55** Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 2x - y + 8z, x + y + z)$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}^3$ . Alors  $((3, -2, -1))$  et  $((1, 2, 1), (2, -1, 1))$  sont des bases respectives de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

**Exemple 56** Soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$ . Alors  $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**Exemple 57** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors

$$\text{rg } f + \text{rg}(f^2) \leq \dim E.$$

## 5 Equations linéaires : lien avec les applications linéaires

**Définition 58 - Equation linéaire.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $c \in F$  fixé. On appelle équation linéaire une équation de la forme

$$f(x) = c, \quad \text{d'inconnue } x \in E.$$

Le vecteur  $c$  est appelé le second membre.

L'équation homogène associée à cette équation est l'équation linéaire

$$f(x) = 0_F, \quad \text{d'inconnue } x \in E.$$

**Exemple 59** Exhiber les espaces vectoriels  $E$  et  $F$ , ainsi que la fonction  $f$  et l'élément  $c$  pour le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

On ne demande pas de résoudre le système.

**Exemple 60** Généraliser l'exercice précédent en replçant un système linéaire de  $p$  équation à  $n$  inconnues dans le cadre d'une équation linéaire.

**Exemple 61** Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . Interpréter les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

comme les solutions d'une équation linéaire. On précisera avec soin les espaces vectoriels en jeu. Même question pour l'ensemble  $S$  des suites de l'exercice 49.

**Théorème 62 - Lien entre les solutions et l'équation homogène.** Soit une équation linéaire

$$f(x) = c, \tag{1}$$

avec les notations de la définition 58.

Alors :

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est  $S_0 = \ker(f)$ .
- Soit  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation (1). Alors on a la disjonction de cas suivantes :
  - ★ Ou bien  $c \in \text{Im}(f)$ , et  $S$  est non vide. Dans ce cas, soit  $x_p$  une solution particulière, alors

$$S = \{x_p + x_0, x_0 \in \ker(f)\}.$$

- ★ Ou bien  $c \notin \text{Im}(f)$ , et  $S$  est vide.

**Remarque 63 - Remise en contexte des solutions d'un système linéaire.**

- La notion de système linéaire *compatible* apparaît maintenant claire (voir le chapitre 13 sur les systèmes linéaires) : on comprend qu'un système peut ne pas avoir de solution lorsque le second membre n'est pas dans l'image de l'application linéaire associée.
- On comprend aussi pourquoi l'ensemble des solutions d'un système linéaire, lorsqu'il est non vide, a des structures prescrites (point, droite, plan, ...) : il s'agit d'un sous-espace vectoriel translaté par une solution particulière.