Chapitre 24 - Séries

Dans tous ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Les séries : des « suites de somme »

Une *série* est un cas particulier de suite, définie à travers les sommes d'une suite donnée :

Définition 1 - Série. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{K}$. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n se note $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, ou encore $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, ou encore $\sum u_n$ si pas d'ambigüité.
Pour $n \geqslant 0$, la quantité S_n est appelée « somme partielle » d'indice n.

Remarque 2 - Premier rang. Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang $n = 1$ (voire $n = p$), on modifie les définitions et notations ci-dessus en définissant

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On évitera par exemple d'écrire par réflexe $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$.

Une série n'est donc qu'une suite particulière. L'objectif principal va être de déterminer si une série converge ou diverge.

Définition 3 - Convergence d'une série. On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite de ses sommes partielles converge. On note alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la limite des sommes partielles, appelée *somme* de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$.

Autrement, on dit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ diverge.

✖ **Attention !** ✖ N'oublier pas qu'un indice de sommation est muet, et ne doit pas se retrouver en dehors de la somme. Ainsi, si (u_n) est le terme général d'une série convergente, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

et cette quantité ne dépend pas de n (ou de k).

Exemple 4 - Des séries explicites. Donner une forme explicite pour les sommes partielles de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans les cas suivants, et dire si la série converge :

- La suite (u_n) est constante.
- La suite $u_n = n$.
- La suite $u_n = (-1)^n$.
- La suite (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $u_0 = 1$.

Définition-Proposition 5 - Reste partiel d'une série convergente. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente. Le reste partiel d'ordre n de cette série est défini comme

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Définition-Proposition 6 - Linéarité de la somme. Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries.

- Si les deux séries convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la série $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- Si une série converge et l'autre diverge, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ diverge.

Remarque 7 - Somme de deux séries divergentes. On ne peut a priori rien dire sur la somme de deux séries divergentes ! Pensez au cas $v_n = -u_n$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Etant donnée une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on n'écrira pas $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ avant d'avoir montré que la série converge. Faites bien la distinction entre la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, c'est-à-dire la suite des sommes partielles, et dans le cas où la série converge, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, qui n'est qu'un nombre, défini comme la limite des sommes partielles.

Proposition 8 - Condition nécessaire de convergence d'une série. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Alors pour que cette série converge, IL FAUT QUE la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tendent vers 0.
Si cette condition n'a pas lieu, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement*

En général, il est dur et souvent même impossible d'obtenir une expression des sommes partielles. Ainsi, étudier la convergence d'une série se fait souvent par des moyens détournés. Voici deux exemples :

Exemple 9 - Exemples d'étude de série. Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

- $\sum_{n\geqslant 1} 2^n$.
- $\sum_{n\geqslant 1} n\sin\frac{1}{n}$.
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ (donner le résultat de mémoire, preuve à venir).

Théorème 10 - Formule essentielle de l'analyse. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et on a alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

✎ **En pratique** ✎ De la preuve, vous devez retenir une formule que vous connaissiez déjà :

$$\forall z \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

mais aussi une formule intéressante pour le reste dans le cas où la série converge :

$$\text{si } |z| < 1, \text{ on a } \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Le résultat suivant permet d'associer naturellement une série (télescopique) à une suite :

Proposition 11 - Lien entre série téléscopique et suite. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite, alors la somme partielle de la série $\sum_{k\geqslant 0}(u_{k+1}-u_k)$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0,$$

et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0}(u_{k+1}-u_k)$ converge. Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

✎ **En pratique** ✎ Cette proposition peut être utilisée dans les deux sens :

- Lorsque la série semble être téléscopique, pour se ramener à une suite.
- Plus rare, lorsque on a des infos sur $u_{n+1}-u_n$, pour exprimer la suite à partir de la série téléscopique associée.

Exemple 12 - Exemples d'étude de série. Donner la nature des séries suivantes, et la valeur de leur somme lorsqu'elles convergent

- $\sum_{k\geqslant 1} \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.
- $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k-1)}$.
- $\sum_{k\geqslant 1} \ln(1+\frac{1}{k})$.

Théorème 13 - Série de l'exponetielle. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge, et on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Démonstration. Bien qu'il existe des outils plus sophistiqués, on a vu dans le TD sur la dérivabilité que l'on pouvait appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $t \mapsto e^{tz}$ entre 0 et 1.

2 Séries à termes positifs

C'est un cas particulier de séries assez importants car on pourra souvent s'y ramener en seconde année. La propriété la plus spécifique que nous allons exploiter est la croissance des sommes partielles : « une série à termes positifs ne peut reculer ».

Théorème 14 - Critère de convergence d'une série à terme positifs. Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Notez que si une série à termes positifs diverge, alors la suite de ses sommes partielles est non majorée et tend donc vers $+\infty$.

Théorème 15 - Théorème de comparaison par encadrement. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites telles que

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Alors on a les théorèmes de comparaisons suivants :

- Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Exemple 16 - Comparaison avec une série de référence. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge.

Théorème 17 - Théorème de comparaison pour des suites équivalentes. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites strictement positives telles que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n.$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature : $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Ce théorème va s'avérer crucial lorsque nous aurons des séries de comparaisons de référence.

Voici un outil technique, qui vent de la méthode des rectangles, pour étudier une série

Théorème 18 - Comparaison série intégrale. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue et décroissante.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, la série $\sum_{k\geqslant 0} f(k)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

✎ **En pratique** ✎ La conséquence principale est le théorème suivant, mais n'oubliez pas que ce théorème de comparaison est idéal pour étudier une série positive de la forme $\sum f(n)$, où f est une fonction décroissante dont vous savez calculer une primitive.

Théorème 19 - Nature des séries de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée *Série de Riemann.*

Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

✎ **En pratique** ✎ Nous avons maintenant un arsenal pour dire si une série à termes positifs converge ou diverge :

- On vérifie que le terme général est positif (ou négatif) afin d'être dans le cadre ci-dessus. On regarde si le terme général tend vers 0, sans quoi l'exercice est déjà fini car la série diverge grossièrement.
- On cherche une comparaison (équivalent, majoration ou minoration) du terme général avec une suite plus simple, idéalement une série de Riemann. La stratégie est de repérer « pourquoi » le terme général tend vers 0, et d'en dégager la contribution principal pour comprendre la « vitesse de convergence ». Attention : le mot « vitesse » reste du vocabulaire pédagogique.
- On conclut en utilisant nos connaissances pour les séries de références, et un des théorèmes de comparaison ci-dessus.

Vous l'avez deviné, la partie qui demande de l'oeil et de la pratique est de trouver une bonne comparaison !

Remarque 20 - Que vaut la somme des séries de Riemann. Soit $\alpha > 1$, on a vu que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, mais la valeur de sa somme est loin d'être facile. Il est bon de savoir que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, résultat historique et assez technique, accessible avec les séries de Fourier vues en physique, mais la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ reste complétement mystérieuse même encore aujourd'hui.
La morale : nous allons souvent montrer qu'une série est convergente, ce n'est pas pour autant que l'on sait calculer sa somme !

Exemple 21 - Trouver la bonne comparaison. Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{e^{\sin n}}{\sqrt{n}}$ **2.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^3+1}$ **3.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$

4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{1}{n^\alpha})$ (discuter selon $\alpha \in \mathbb{R}$). **5.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha \sin(\frac{1}{n^3})$ (discuter selon $\alpha \in \mathbb{R}$). **6.** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

✖ **Attention !** ✖ Le théorème de comparaison avec les équivalents est faux si le signe des suites n'est pas constant. Ce sont des cas dégénérés, mais ce sont ceux qu'on risque de vous donner pour voir si vous tombez dans le piège, ils seront explorés en seconde année.
Attention aussi : si vous cherchez la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et que vous trouvez une suite (v_n) telle que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ avec $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ qui diverge, vous n'avez rien montré : « montrer qu'on est plus petit que $+\infty$ n'avance à rien ».

3 Séries absolument convergentes (PSI)

Dans cette section, les suites sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. Lorsque les nombres considérés sont dans $\mathbb{C}$, alors $|\cdot|$ désigne le module.

Définition 22 - Convergence absolue. Un série de terme général u_n est dite *absolument convergente* lorsque $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est *sommable*. On peut noter alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Exemple 23 - Convergence absolue. Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n^3}$ **2.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. **3.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in^2}}{n^4}$.

Si la série est à termes de signe constant, alors l'absolue convergence n'est rien d'autre que la convergence.

Théorème 24 - Convergence absolue implique convergence. Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, alors la série est convergente.

On évitera le raccourci suivant « On a $|\sum u_n| \leqslant \sum |u_n|$, or la série $\sum |u_n|$ converge donc la série $\sum u_n$ aussi par comparaison ». Ce raisonnement est faux et cache la complexité du théorème ci-dessus.

✎ **En pratique** ✎ Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge, on peut montrer qu'elle converge absolument, en étudiant la série $\sum |u_n|$. Si celle-ci converge, on pourra utiliser le théorème ci-dessus. Par contre, si $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut pas conclure, et c'est en général le début des ennuis, mais ces cas sont marginaux dans le programme. Il faut trouver un angle d'attaque

Exemple 25 - Convergence absolue implique convergence. Appliquer le théorème précédent aux séries de l'exemple ci-dessus.

Proposition 26 - Convergence absolue implique convergence. Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ complexe, et soit (v_n) une suite positive telle que $u_n = O(v_n)$, et telle que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

Cette proposition permet de raisonner « à la louche » sans avoir des majorations précises :

Exemple 27 - Trouver la domination. Monter que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln(n) e^{in}}{n^2}$ est convergente.