# Chapitre 25 - Déterminants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul.

## 1 Déterminant d'une matrice carrée

### 1.1 Définition théorique (et pratique pour $n = 2$ et $n = 3$)

Commençons frontalement par la définition du déterminant d'une matrice :

**Définition-théorème 1 - Déterminant d'une matrice.** Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que

- L'application est linéaire par rapport à chacune des colonnes
- Elle est antisymétrique par rapport aux colonnes (inverser deux colonnes revient à multiplier par -1).
- L'image de la matrice $I_n$ vaut 1.

Cette application est appelée *déterminant* de la matrice. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ son déterminant.

**Notation 2 - Déterminant d'une matrice.** Lorsqu'une matrice est notée explicitement avec ses coefficients, on peut noter son déterminant avec des barres. Ce n'est pas la valeur absolue !

Notez que pour $n = 1$, l'énoncé a peu d'intérêt, et on a $\det(a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{K}$.

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème est admis pour $n \geqslant 4$. La preuve, constructive, amène aux formules explicites suivantes :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Voir prises de notes pour des méthodes de calculs visuelles (règle du $\gamma$ pour $n = 2$ et règle de Sarrus pour $n = 3$).

Ne cherchez pas une formule générale pour le cas général, c'est hors de notre portée. Il est plus intéressant de noter que l'on a déjà vu cette application pour $n = 2$ et $n = 3$ :

**Proposition 3 - Déterminant d'une matrice et produit mixte.**

- Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ dont on note $C_1$ et $C_2$ les colonnes. Alors $\det(A) = [C_1, C_2]$.
- Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, C_2$ et $C_3$ les colonnes. Alors $\det(A) = [C_1, C_2, C_3]$.

### 1.2 Propriétés et règles de calculs

**Proposition 4 - Nullité d'un déterminant.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

- Si une colonne de $A$ est nulle, alors $\det(A) = 0$.
- Si deux colonnes de $A$ sont égales, alors $\det(A) = 0$.

**Proposition 5 - Multilinéarité.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

✖ **Attention !** ✖ On peut ainsi factoriser un scalaire dans une matrice pour simplifier le calcul du déterminant, mais on pensera à le mettre à la bonne puissance !

**Proposition 6 - Déterminant d'une matrice diagonale.** Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.

Les effets des dilatations et des permutations sur les colonnes d'une matrices sont claires, d'après la définition. La propriété suivante vient compléter les effets des opérations élémentaires :

**Proposition 7 - Effet des transvections sur le déterminant.** Effectuer une transvection sur les colonnes (c'est-à-dire, ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres), ne change pas la valeur du déterminant.

**Corollaire 8 - Déterminant d'une matrice triangulaire.** Tout comme pour une matrice diagonale, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

**Exemple 9 - Déterminant des matrices des opérations élémentaires.** Trouver le déterminants des matrices de permutations, de transvection et de dilatation.

✎ **En pratique** ✎ On peut donc appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner une matrice afin de calcul son déterminant !

**Exemple 10 - Matrice de Vandermonde.** On se donne 4 réels $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

Voici LA raison pour laquelle il est intéressant de calculer des déterminants :

**Théorème 11 - Déterminant et inversibilité.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \det A \neq 0.$$

Ce théorème ne dit pas comment calculer l'inverse... mais dans le cas d'une matrice carrée de taille 2 inversible, on peut expliciter son inverse avec le déterminant :

**Exemple 12 - Inversion d'une matrice de taille 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ est inversible si et seulement si } ad - bc \neq 0, \quad \text{et on a alors } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

✎ **En pratique** ✎ Il est recommandé de connaître la formule précédente par coeur afin d'inverser rapidement des matrices de taille 2.

**Exemple 13 - Vital pour l'année prochaine.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$ si et seulement $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$.

Voici une règle de calcul pour le déterminant :

**Théorème 14 - Déterminant d'un produit et de l'inverse.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$, alors on a

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$

De plus, si $A$ inversible, alors on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

✖ **Attention !** ✖ La formule pour le produit est réellement dure à prouver avec nos outils. Notez bien qu'en général, on a

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B),$$

alors ne confondez pas les deux !

**Proposition 15 - Déterminant de la matrice transposée.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors on a $\det(A^T) = \det(A)$.

Encore une formule ! Ne vous privez pas de les réunir dans un formulaires, mais gardez en tête qu'elles ont des origines bien différentes...

✎ **En pratique** ✎ Cette formule a une conséquence pratique essentielle : toute propriété ou règle pour le déterminant valide sur les colonnes l'est aussi pour les lignes. Listez-les mentalement...

Voici la méthode prioritaire pour calculer le déterminant d'une matrice (hormis les matrices triangulaires). On doit commencer par la définition suivante :

**Définition 16 - Cofacteurs.** Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2$, on appelle

- Mineur d'indice $(i,j)$ le déterminant $\Delta_{ij}$ de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant (en « rayant ») la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne de $A$.
- Cofacteur d'indice $(i,j)$ le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

A quoi servent ces définitions alambiquées ? Voici la réponse :

**Théorème 17 - Développement par rapport à une ligne ou à une colonne.** Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

- Fixons une ligne $i \in [\![1\,,n]\!]$. Alors on peut développer $\det(A)$ par rapport à cette ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

- Fixons une colonne $j \in [\![1\,,n]\!]$. Alors on peut développer $\det(A)$ par rapport à cette colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

✎ **En pratique** ✎ Ce sera à vous de choisir par rapport à quelle ligne (ou colonne) vous allez développer. Une règle générale est de choisir celle où il y a le plus de 0, de manière à avoir un maximum de terme nulle dans la somme précédente. Vous pouvez faire apparaître des 0 au préalable grâce à des opérations élémentaires !

Notez que cette technique vous amène à calculer $n$ déterminants de taille $n-1$. Ainsi, sans stratégie plus éclairée, la complexité du calul d'un déterminant est de $n!$ opérations.

**Exemple 18 - Trouver la bonne ligne (ou colonne).** Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

**Exemple 19 - Matrice tridiagonale.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n$ le déterminant de la matrice de taille $n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & & \\ -4 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 9 \\ & & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Etablir une relation de récurrence sur la suite $(D_n)$. En déduire la valeur explicite de $D_n$.

# 2 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

## 2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Cette notion, bien que reliée aux autres définitions du déterminant, présente une subtilité : le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on se place

**Définition 20 - Déterminant d'une famille de vecteurs.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille <u>de $n$ vecteurs</u> de $E$. On appelle déterminant <u>dans la base $\mathcal{B}$</u> de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n))$$

Voici l'alter ego de la caractérisation des matrices inversibles par le déterminant :

**Proposition 21 - Base et déterminant.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de $E$. Alors

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ si et seulement si } \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0.$$

Il est remarquable que ce critère ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie ! On dispose maintenant d'un nouveau critère pour savoir si une famille est une base.

✎ **En pratique** ✎ Dans le cadre de $E = \mathbb{K}^n$, pour calculer le déterminant d'une famille de $n$ vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on peut former la matrice dont les colonnes sont les $(u_i)$ et calculer son déterminant : il s'agit en effet de la matrice de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

## 2.2 Déterminant d'un endomorphisme

**Définition-théorème 22 - Déterminant d'un endomorphisme.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$. Alors le déterminant de la matrice de $u$ dans une base de $E$ ne dépend pas de la base choisie. Ce nombre est appelé $\det(u)$. Autrement dit :

$$\det u = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right), \text{ avec } \mathcal{B} \text{ une base de } E.$$

**Exemple 23 - Un calcul explicite.** Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $u((x, y)) = (x - y, x + y)$.

**Exemple 24 - Déterminant d'une rotation.** Calculer le déterminant d'une rotation de $\mathbb{R}^2$, ainsi que le déterminant d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 25 - Déterminant d'un endomorphisme de polynômes.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$u : P \mapsto X^2 P'' + (\alpha X + 1)P' + P + P(1)X^2.$$

Calculer $\det u$.

**Propriétés du déterminant d'un endomorphisme (PSI)** A quoi sert-il de calculer le déterminant d'un endomorphisme ? La propriété suivante découle naturellement de la représentation d'un endomorphisme par des matrices :

**Définition-théorème 26 - Déterminant d'un endomorphisme.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et $u$ et $v$ dans $\mathcal{L}(E)$. Alors on a

- $\det(v \circ u) = \det v \times \det u$.
- La fonction $u$ est un automorphisme (cad une bijection) si et seulement si $\det u \neq 0$. On a alors

$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}.$$

**Exemple 27 - Déterminant d'un endomorphsme de polynômes.** Reprendre la fonction $u$ de l'exercice 25, et dire si elle est bijective.

**Exemple 28 - Un autre exemple.** Soit $u$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$u : P \mapsto \int_X^{X+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. La fonction $u$ est-elle bijective ?