Chapitre 26 - Probabilités finis I : Espaces probabilisés finis et variables aléatoires

1 Modélisation d'une expérience aléatoire : Univers, évènements, variable aléatoire

1.1 Univers et évènements

Le concept d'*expérience aléatoire* n'est pas mathématique à proprement parler. On appelle ainsi toute expérience susceptible *a priori* de *résultats* différents lors de répétitions dans des conditions similaires. L'ensemble de ces résultats observables est appelé l'*univers* de l'expérience étudiée et est très souvent noté Ω. Plutôt que de résultats, on parle aussi souvent d'*issues* ou de *réalisations*.

- **Lancer d'un dé à 6 faces.** L'expérience d'un lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats, selon la face obtenue. Pour modéliser un tel lancer, on peut donc choisir pour univers Ω l'ensemble $[\![1\,,6]\!]$.
- **Deux lancers d'un dé à 6 faces.** Si l'on lance deux fois de suite un même dé, la modélisation la plus naturelle des résultats est offerte par l'univers $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$, où la première coordonnée d'un couple $(i, j) \in \Omega$ représente le résultat du premier lancer et la seconde celui du second lancer. Plus généralement, n lancers d'un même dé seront modélisés par l'univers $[\![1\,,6]\!]^n$.
- **Lancer de deux dés.** Lançons maintenant deux dés identiques une seule fois. On peut ici aussi modéliser les issues par des couples (i, j) de nombres entre 1 et 6. Il faut alors veiller à ce que les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$ représentent la même issue. Ainsi l'univers sera $\Omega = \left\{(i, j) \in [\![1\,,6]\!]^2 \;\middle|\; i \leqslant j\right\}$. Ceci dit, cette expérience n'est modifiée que marginalement si l'on suppose l'un des deux dés peint en rouge et l'autre en vert. L'univers s'écrit alors à nouveau $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$, en convenant par exemple que la première coordonnée représente le résultat du dé rouge et la seconde celui du dé vert.

Ainsi une même expérience aléatoire peut être décrite de diverses façons et sa modélisation dépend donc d'un choix du probabiliste. Deux descriptions concurrentes ne conduisent pas nécessairement à la même étude, mais doivent donner des résultats observables identiques. On choisira alors la plus commode.

- **Lancer d'une pièce de monnaie.** L'expérience d'un lancer d'une pièce de monnaie peut conduire à 2 issues, selon que l'on obtient Pile ou Face, on peut donc choisir l'univers $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$. On peut aussi, afin d'alléger les notations, utiliser l'univers $\{0, 1\}$, où l'on convient que 0 représente l'obtention d'un Pile et 1 celui d'un Face.
- **Lancers répétés d'une pièce de monnaie.** On lance maintenant une pièce de monnaie jusqu'à obtenir un Face. Avec la convention de notation précédente, on peut alors considérer l'univers $\{\infty, 1, 01, 001, 0001, \ldots\}$, qui contient tous les mots écrits avec une suite quelconque de 0 terminée par un 1 et où le symbole ∞ représente l'issue « La pièce donne toujours Pile ». Mais on pourrait aussi utiliser l'univers $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$, où chaque entier désigne le rang d'apparition de Face. Il y a une bijection évidente entre ces deux ensembles et l'univers de cette expérience est infini en bijection avec $\mathbb{N}$.
- **Lancers répétés d'une pièce de monnaie (bis).** On pourrait aussi vouloir observer des suites quelconques de Pile et de Face. L'univers attaché naturellement à ces situations est $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1.

Dans ce chapitre, tous les univers considérés seront finis. Certains univers infinis seront étudiés ultérieurement.

Pour une expérience aléatoire donnée, on peut bien sûr appréhender chaque résultat isolément en tant qu'ÉLÉMENT de Ω, mais généralement notre intérêt s'oriente vers des regroupements d'issues définies génériquement par une propriété commune et appelés *événements*.

- Dans le lancer de dé précédent, la propriété « La face obtenue est paire » est satisfaite par trois résultats, en l'occurrence 2, 4 et 6, et sera identifiée à l'ensemble $\{2, 4, 6\}$, *i.e.* une partie de Ω.

- Lors du lancer de deux dés, la propriété « la somme des deux dés obtenus vaut 4 » est, dans le cadre de la modélisation par l'univers $\Omega = [\![1\,,6]\!]^2$ (avec deux dés pouvant être distingués), satisfaite par les issues $(1,3)$, $(2,2)$ et $(3,1)$ et sera identifiée à l'ensemble $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, *i.e.* une partie de Ω.
- Lors de lancers répétés d'une pièce, on peut s'intéresser aux événements « Obtenir la séquence 010 avant la séquence 111 » ou encore « Ne jamais observer deux 1 consécutifs », etc..

Ainsi les événements sont des PARTIES de l'univers Ω qui modélise l'expérience aléatoire considérée.

Définition 1 - Vocabulaire usuel sur les événements.
Soit Ω l'univers fini d'une certaine expérience aléatoire, *i.e.* l'ensemble des résultats possibles de cette expérience.

- On appelle *événement* toute partie de Ω, *i.e.* tout élément de $\mathscr{P}(\Omega)$. Un événement A est dit *réalisé* lorsque le résultat de l'expérience est un élément de A.
- Les singletons $\{\omega\}$, avec $\omega \in \Omega$, sont appelés les *événements élémentaires* de Ω.
- L'événement Ω est l'*événement certain* et l'événement $\varnothing$ est l'*événement impossible*.
- Pour tous événements $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$,
  - ⋆ l'événement $A \cup B$, appelé l'événement « A ou B », est réalisé lorsque l'un au moins des événements A et B l'est ;
  - ⋆ l'événement $A \cap B$, appelé l'événement « A et B », est réalisé lorsque les événements A et B le sont ;
  - ⋆ l'événement $\overline{A}$, appelé l'*événement contraire à* A, est réalisé lorsque A ne l'est pas.
- Deux événements A et B de Ω sont dits *incompatibles* lorsqu'ils sont disjoints, *i.e.* $A \cap B = \varnothing$.
- On dit enfin que l'événement A *implique* l'événement B lorsque $A \subset B$.

Définition 2 - Système complet d'événements. Soit Ω l'univers fini d'une certaine expérience aléatoire.
On appelle *système complet d'événements* de Ω toute famille finie $(A_i)_{i\in I}$, *i.e.* avec I un ensemble fini, d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'événement certain, *i.e.* pour laquelle $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ – réunion disjointe.

Utiliser un système complet d'événements revient à raisonner par disjonction des cas. On découpe l'univers en plusieurs événements, un et un seul d'entre eux étant réalisé lors de chaque expérience.

Exemple 3

- Pour l'expérience aléatoire du lancer d'un dé à 6 faces, les événements « La face obtenue est paire » et « La face obtenue est impaire » forment un système complet d'événements. En effet, on obtient à tous les coups une face paire ou impaire, mais jamais les deux simultanément.
- Plus généralement, pour tout événement A d'un univers fini Ω, le couple d'événements $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements, puisque $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
- Si l'univers est un jeu de 52 cartes, on peut découper celui-ci en divers systèmes complets d'événements. Par exemple, les événements $A_\clubsuit$ « la carte est un trèfle », $A_\spadesuit$, $A_\heartsuit$ et $A_\diamondsuit$ forment un système complet d'événements. Mais on pourrait aussi considérer celui formé par les événements B_i « la carte est un i », avec $i \in \{1, 2, \ldots, 10, V, D, R\}$.
- Pour tout univers fini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, il est clair que $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$ et la famille des événements élémentaires $(\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\})$ forme un système complet d'événements.

1.2 Variables aléatoires

De façon informelle, une variable aléatoire est une infomation liée à une expérience aléatoire qui dépend exclusivement du résultat ω de cette expérience. Les plus pertinentes sont les variables aléatoires *réelles* (cest-à-dire que l'information est une graneur réelle). Mathématiquement, une variable aléatoire est donc une fonction définie sur l'univers Ω associé à l'expérience. Voici quelques exemples de variables aléatoires :

- la somme des chiffres obtenus en lançant deux dés ;
- le nombre moyen d'appels reçus par un standard téléphonique en une heure ;

- la durée de vie d'une ampoule ;
- la première lettre d'un mot.

Les trois premiers exemples sont des variables aléatoires réelles.

Définition 4 - Variable aléatoire réelle (finie), support.

- Soit Ω l'univers fini d'une certaine expérience aléatoire, et E un ensemble. On appelle *variable aléatoire* sur Ω toute application $X : \Omega \to E$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de *variable aléatoire réelle.*
- L'ensemble $\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ des valeurs prises par X, noté $X(\Omega)$, est appelé le *support* de la variable aléatoire X. Puisque Ω est fini, il en va de même de $X(\Omega)$ et à ce titre la variable aléatoire X est dite *finie.*

Définition 5 - Evènements associés à une variable aléatoire.
Pour toute partie A de E, on note $(X \in A)$ ou encore $\{X \in A\}$ l'image réciproque $X^{-1}(A)$ de A par X :

$$(X \in A) = \{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

C'est un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$, c'est-à-dire un événement.
De plus, on a les notations spécifiques suivantes :

- Si $a \in \Omega$, on note $(X = a)$ l'image réciproque $X^{-1}(\{a\})$ de $\{a\}$ par X, *i.e.* le sous-ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ de Ω ;
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $(X \leqslant a)$ l'image réciproque $X^{-1}(]-\infty\,, a])$ de $]-\infty\,, a]$ par X, *i.e.* le sous-ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ de Ω ; et on définit évidemment de même $(X \geqslant a)$, $(X < a)$ et $(X > a)$.

Rappelons que l'opération « image réciproque » est compatible avec les opérations ensemblistes :

$$X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \qquad\qquad X^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{X^{-1}(A)}$$
$$X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B) \qquad\qquad X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B),$$

où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$. On peut alors manipuler naturellement les notations introduites précédemment, *e.g.* pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$,

$$(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B) \qquad \text{et} \qquad (X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B).$$

Une variable aléatoire X associe une valeur (numérique pour une variable aléatoire réelle) à chaque résultat lié à une expérience aléatoire. Mais au-delà de cette transformation, elle redéfinit complètement l'espace d'étude : tout sous-ensemble de E devient au travers de X un événement « étudiable ». De plus toutes les propriétés de l'ensemble E peuvent être utilisées pour enrichir la modéliation de l'expérience aléatoire.

Par exemple (voir ci-dessous), on ne peut pas « ajouter deux dés » mais on peut ajouter les nombres associés à leurs faces.

Remarque 6 L'appellation variable aléatoire, bien que malheureuse, est usuelle. En effet, X n'est pas une variable, mais bien une fonction et celle-ci n'a rien d'aléatoire, mais est plutôt entièrement déterministe. Ce sont les valeurs prises par X qui correspondent à des quantités qui vont varier selon les résultats d'une expérience aléatoire.

Exemple 7 Pour modéliser le lancer d'un dé à 6 faces, deux fois successivement, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble $[\![1\,, 6]\!]^2$. La fonction X_1 (resp. X_2) « valeur obtenue au premier (resp. deuxième) lancer » est une variable aléatoire réelle finie sur Ω de support $[\![1\,, 6]\!]$.
La fonction $S = X_1 + X_2$ « somme des deux faces obtenues » en est une autre, de support $[\![2\,, 12]\!]$. On peut alors écrire

- $(S = 8) = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.
- $(S \leqslant 4) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

Exemple 8 Un concierge possède un trousseau de 10 clés, dont une seule permet d'ouvrir la porte face à lui. On suppose que les essais de clés se font au hasard et SANS remise et on note X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte. Alors $X(\Omega) = [\![1\,, 10]\!]$ et X est une variable aléatoire réelle finie.

2 Probabilités sur un univers fini

2.1 Définition et propriétés

Définition 9 - Probabilité. Soit Ω l'univers fini d'une certaine expérience aléatoire. On appelle *probabilité sur* Ω toute application $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,,1]$ telle que

(i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

(ii) $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad A \cap B = \varnothing \implies \mathrm{P}(A \sqcup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ *(additivité)*.

Le couple (Ω, P) ainsi formé est appelé un *espace probabilisé fini.*

Remarque 10 Une probabilité est par définition à valeurs dans l'intervalle $[0\,,1]$, ainsi, pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$. On vérifiera donc SYSTÉMATIQUEMENT que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Notation 11 Etant donné un espace probabilisé fini (Ω, P) et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$, on peut définir avec les notations de la définition **??** :

- Pour une partie $A \subset E$, la quantité $P(X \in A)$,
- Pour un élément $x \in E$, la quantité $P(X = x)$,
- Si X est une variable aléatoire réelle, pour un réel $x \in E$, la quantité $P(X \leqslant x)$.

Vue comme une application entre l'ensemble des événements $\mathscr{P}(\Omega)$ et l'intervalle $[0\,,1]$, une probabilité est un objet *a priori* complexe à définir. Pour une expérience aussi simple que le lancer d'un dé, doit-on expliciter la probabilité des 2^6 événements de $\mathcal{P}([\![1\,,6]\!])$? Puis vérifier les axiomes de la définition ? Un autre angle d'attaque est nettement préférable et consiste à se limiter à une classe particulière d'événements dont on définit la probabilité, puis à étendre cette dernière aux autres événements, de façon à respecter les axiomes d'une probabilité. Ce principe est l'objet du théorème suivant.

Définition-théorème 12 - Détermination d'une probabilité sur les événements élémentaires.

- Une distribution de probabilité sur un ensemble E est la donnée d'une famille de réels positifs $(p_i)_{i\in E}$, indicée par E, tels que $\sum_{i\in E} p_i = 1$.
- Une probabilité sur un univers Ω fini est entièrement déterminée par ses valeurs sur les événements élémentaires.

  Précisément, si l'univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini et si $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de réels positifs de somme 1, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Le deuxième point du théorème précédent peut être résumé de la façon suivante : si Ω est un univers de n éléments, alors une famille de réels $(p_i)_{i=1,\dots,n}$ définit une probabilité sur Ω si et seulement si

$$\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ p_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Démonstration. ... ■

2.2 Exemple fondamental : la probabilité uniforme

Notation 13 - Événements équiprobables. Deux événements A et B d'un univers probabilisé sont dits *équiprobables* lorsque $P(A) = P(B)$.

Définition-théorème 14 - Événements équiprobables, probabilité uniforme.
Soit Ω un ensemble fini. On définit la probabilité *uniforme* P sur Ω comme étant la probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires sont équiprobables, ce qui revient à avoir

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

On a alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

L'existence d'une telle probabilité est assurée par le théorème **??**.
La relation « $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ » est naturelle et bien connue, c'est le fameux rapport « $\dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$ ».

✎ **En pratique** ✎ L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé par rapport à un autre (dés non pipés, pièces équilibrées, boules indiscernables dans une urne, ...). Vous prendrez soin de bien faire apparaître (ou prononcer) le mot clef *probabilité uniforme* dans un tel contexte.

Exemple 15 On lance un dé à 6 faces non pipé une fois. L'espace probabilisé naturel pour cette expérience aléatoire est formé de l'univers $\Omega = [\![1\,,6]\!]$, l'ensemble des résultats potentiels, et on définit pour probabilité P sur Ω la probabilité uniforme – chaque face ayant autant de chance d'apparaître si le dé n'est pas pipé. Donner la probilité de chaque événementélémentaire. Notons A l'événement « le résultat est un nombre pair ». Détermine $\mathrm{P}(A)$.

Exemple 16 Une urne contient $3n$ boules numérotées de 1 à $2n$ avec, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, exactement 2 boules indiscernables de numéro $2k$ et exactement une boule de numéro $2k-1$. On tire de cette urne une boule au hasard et on regarde son numéro. Pour modéliser ce tirage, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble $[\![1\,,2n]\!]$ de tous les numéros possibles et pour probabilité P la probabilité définie, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, par $\mathrm{P}(\{2k\}) = \dfrac{2}{3n}$ et $\mathrm{P}(\{2k-1\}) = \dfrac{1}{3n}$.
On définit bien ainsi une probabilité, puisque la somme des probabilités élémentaires, qui sont des réels positifs, est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{P}(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\{2k\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\{2k-1\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n} = 1.$$

L'événement A « On tire une boule de numéro pair » est alors de probabilité $\mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3n} = \frac{2}{3}$.

Exemple 17 - Loi binomiale. Considérons l'univers $\Omega = [\![0\,,n]\!]$, un réel $p \in]0\,,1[$ et posons, pour tout $k \in [\![0\,,n]\!]$, $p_k = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Cette famille de réels définie une probabilité sur Ω.
En effet, ces réels sont positifs et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$, d'après la formule du binôme.
Nous verrons bientôt ce que modélise cette distribution de probabilité.

Théorème 18 - Propriétés des probabilités. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $A, B, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- **(i) Ensemble vide.** $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
- **(ii) Complémentaire et différence.** $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
- **(iii) Croissance.** Si $A \subset B$, alors $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.
- **(iv) Union.** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$.
- **(v) Réunion disjointe.** Si $A_1, \ldots, A_n$ sont DEUX À DEUX INCOMPATIBLES, alors $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$.

Démonstration. ... ■

Remarque 19 On pourra noter l'analogie de ces formules avec celles concernant les calculs de cardinaux.

Exemple 20 Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) = 1.$$

En effet, par définition, $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$.

Exemple 21 Reprendre l'exemple **??**. Les deux dés sont supposés équilibrés. Déterminer $\mathrm{P}(S=8)$ et $\mathrm{P}(S \leqslant 4)$. Déterminer également $\mathrm{P}(S \leqslant 10)$.

✎ **En pratique** ✎ Comme on vient de le voir, la formule $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$ est idéale si A est complexe à décrire, mais que $\overline{A}$ est simple, typiquement si $\overline{A}$ est de petit cardinal (voir exemple si dessus).

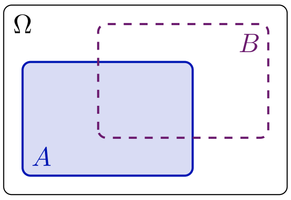
3 Probabilité conditionnelle

En général, lorsqu'un processus expérimental complexe est mis en jeu, le résultat final est difficile à décrire directement. Il est alors préférable de décomposer l'expérience globale en plusieurs étapes. La notion de probabilité conditionnelle permet d'étudier séparément chacune de ces étapes.

3.1 Définition

Préliminaires

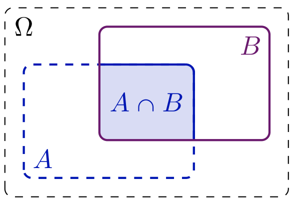
Soit Ω un univers fini, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et notons P la probabilité UNIFORME sur Ω. Dans ce cadre, l'événement A a pour probabilité $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.



Faisons maintenant l'hypothèse que $\mathrm{P}(B) > 0$ et que nous disposons de l'information supplémentaire suivante concernant la situation modélisée par (Ω, P) : l'événement B est réalisé. La probabilité P choisie initialement n'est alors plus pertinente puisque, B étant réalisé, on devrait avoir $\mathrm{P}(B) = 1$ et $\mathrm{P}(\overline{B}) = 0$, ce qui n'est pas le cas *a priori*. Il convient donc d'introduire une nouvelle probabilité P_B, mais selon quelle modalité, sachant que B est réalisé ? Il est possible de conserver l'univers Ω, tout en considérant qu'il n'est plus l'ensemble de tous les cas possibles de l'expérience modélisée, qui sont dorénavant circonscrits à B. Quant à l'ensemble des cas favorables à la réalisation de A, celui-ci n'est plus A tout entier, mais sa restriction $A \cap B$.

Finalement, la nouvelle probabilité $\mathrm{P}_B(A)$ de A vaut :

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$



$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Relativement à P, la probabilité $\mathrm{P}_B : A \longmapsto \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$, dite *probabilité conditionnelle sachant* B, se présente comme une fonction aveugle à tout ce qui dépasse le cadre de B. La division par $\mathrm{P}(B)$ garantit l'égalité $\mathrm{P}_B(B) = 1$. En résumé :

Conditionner revient à redimensionner l'ensemble des cas possibles.

De façon générale, on pose la définition suivante.

Définition-théorème 22 - Probabilité conditionnelle.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement de probabilité NON NULLE.

- Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, la *probabilité conditionnelle de A sachant B*, notée $\mathrm{P}_B(A)$ ou $\mathrm{P}(A|B)$, est le réel
$$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$
- L'application $\mathrm{P}_B : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,,1]$ est une probabilité sur Ω, appelée la *probabilité conditionnée à B*.
En particulier, P_B possède des propriétés d'une probabilité listées au théorème **??**.

La probabilité de A sachant B est la probabilité de l'événement A dans la situation où l'on sait que l'événement B s'est réalisé.

Démonstration. ... ■

Remarque 23 - Probabilité conditionnée par un événementimpossible. Si $\mathrm{P}(B) = 0$, on fait la convention que $\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}_B(A) = 0$. Ce choix est cohérent avec la formule $\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A \cap B)$, valide dans le cas $\mathrm{P}(B) \neq 0$.

Exemple 24 On lance un dé cubique équilibré. L'univers est donc $[\![1\,,6]\!]$ et est muni de la probabilité uniforme, notée P. On considère les événements suivants :

- A : « obtenir un nombre inférieur à 3 » ; • B : « obtenir un 5 » ; • C : « obtenir un 2 ».

Calculons $\mathrm{P}_A(B)$ et $\mathrm{P}_A(C)$, avec notre formule, puis vérifions la cohérence du résultat obtenu :

- Pour $\mathrm{P}_A(B)$
  1. Par définition :
  $$\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(\varnothing)}{\mathrm{P}(A)} = 0.$$
  2. $\mathrm{P}_A(B)$ est la probabilité que B soit réalisé sachant que A l'est. Or, sachant que le résultat du lancer est inférieur à 3, il est impossible qu'il soit égal à 5.
- Pour $\mathrm{P}_A(C)$:
  1. Par définition :
  $$\mathrm{P}_A(C) = \frac{\mathrm{P}(A \cap C)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$
  2. Si A est réalisé, l'issue du lancer est un élément de $\{1, 2, 3\}$. Les résultats étant équiprobables, la probabilité d'avoir obtenu un 2 dans cet univers des possibles est alors de $\dfrac{1}{|\{1, 2, 3\}|} = \dfrac{1}{3}$.

3.2 Formules en lien avec les probabilités conditionnelles

Dans cette section, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

3.2.1 Formule des probabilités composées

Le théorème suivant résulte directement de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Théorème 25 Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$.
(i) Par définition, si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, alors $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(B)$.
(ii) (**Symétrie**) Si $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \neq 0$, alors $\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(B)$.

En outre, le premier point de la proposition précédente se généralise à une intersection finie d'événements.

Théorème 26 - Formule des probabilités composées. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$.
Si $\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors
$$\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}_{A_1}(A_2)\,\mathrm{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathrm{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) = \mathrm{P}(A_1) \prod_{i=2}^{n} \mathrm{P}_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)\,.$$

Cette formule s'utilise dès qu'il est possible de décomposer l'expérience aléatoire en plusieurs étapes successives.

Démonstration. ... ∎

Exemple 27 Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement, sans remise et au hasard 3 boules. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ? (On peut utiliser la formule des probabilités composées ou un calcule direct dénombrant les 3-listes).

Exemple 28 Un commerçant met en vente n tickets d'un certain jeu dont exactement g sont gagnants. Je lui achète k tickets, avec $k \leqslant n-g$. Avec quelle probabilité en ai-je acheté au moins un gagnant ?

En effet, On notera G l'événement « L'un au moins des tickets achetés est gagnant », d'événement contraire $\overline{G}$ « Tous les tickets achetés sont perdants ». Pour obtenir $\mathrm{P}(G)$, il sera ici plus facile de calculer $\mathrm{P}\big(\overline{G}\big)$.

- **Méthode 1.** À base de dénombrement après une définition précise de l'espace probabilisé (Ω, P).
  On numérote les tickets gagnants de 1 à g et les tickets perdants de $g+1$ à n. On peut alors choisir pour univers Ω l'ensemble $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n\rrbracket)$ des k-combinaisons de $\llbracket 1, n\rrbracket$ – achat simultané des k tickets – et pour probabilité P sur Ω la probabilité uniforme. Pour ce modèle, $\overline{G} = \mathcal{P}_k(\llbracket g+1, n\rrbracket)$, ainsi

$$\mathrm{P}\big(\overline{G}\big) = \frac{|\overline{G}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n-g}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-g)(n-g-1)\ldots(n-g-k+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} = \frac{n-g}{n} \times \frac{n-g-1}{n-1} \times \cdots \frac{n-g-k+1}{n-k+1}$$
$$\ldots = \left(1-\frac{g}{n}\right)\left(1-\frac{g}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{g}{n-k+1}\right) = \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{g}{n-j}\right).$$

- **Méthode 2.** À base de probabilités conditionnelles sans aucune définition de l'espace (Ω, P).
  On considère que les k tickets achetés l'ont été dans un certain ordre et, pour tout $i \in \llbracket 1, k\rrbracket$, on pose T_i l'événement « Le i-ème ticket acheté est perdant ». Alors $\mathrm{P}_{T_1\cap\ldots\cap T_{i-1}}(T_i) = \dfrac{n-g-i+1}{n-i+1}$, pour tout $i \in \llbracket 1, k\rrbracket$, car, sous l'hypothèse que les $i-1$ premiers tickets achetés ont été perdants, il reste au commerçant $n-i+1$ tickets à vendre dont $n-g-i+1$ perdants. Finalement, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}\big(\overline{G}\big) = \mathrm{P}(T_1 \cap \ldots \cap T_k) = \mathrm{P}(T_1)\,\mathrm{P}_{T_1}(T_2)\cdots\mathrm{P}_{T_1\cap\ldots\cap T_{k-1}}(T_k) = \prod_{i=1}^{k}\frac{n-g-i+1}{n-i+1}$$
$$\ldots = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{g}{n-i+1}\right) \overset{j=i-1}{=} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{g}{n-j}\right).$$

3.2.2 Formule des probabilités totales

Théorème 29 - Formule des probabilités totales. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors, pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}_{A_i}(B),$$

avec la convention que $\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}_{A_i}(B) = 0$ si $\mathrm{P}(A_i) = 0$.

Démonstration. Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i).$$

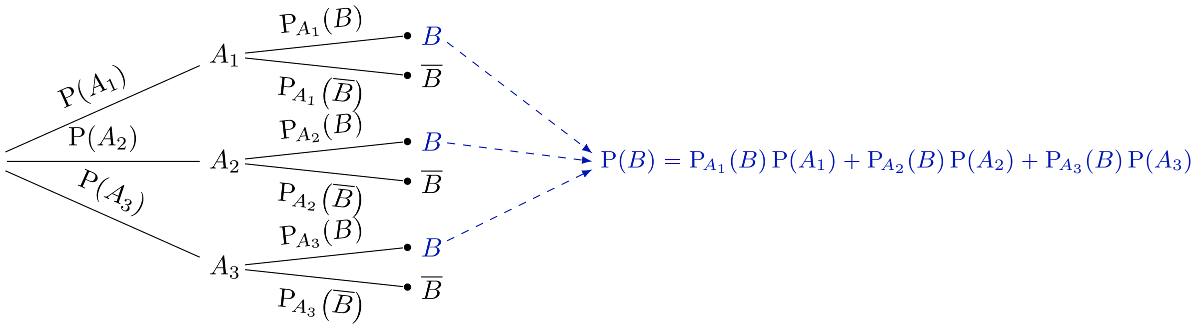
Il suffit alors d'appliquer la propriété d'additivité d'une probabilité à cette réunion d'événements deux à deux incompatibles. ∎

Exemple 30 On reprend l'exemple **??**. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au 2$^{\mathrm{e}}$ tirage ?

Remarque 31 L'idée derrière la formule des probabilités totales est celle de l'étude de cas. Dans l'exemple précédent, on teste l'événement $\overline{B_2}$ selon les deux issues possibles du premier tirage : soit on a obtenu une boule noire ($\overline{B_1}$), soit on a obtenu une boule blanche (B_1).

- L'étude de cas se doit d'être exhaustive, *i.e.* inclure tous les cas possibles.
  $\hookrightarrow$ Ceci est assuré par le fait que la réunion des événements d'un système complet d'événements est Ω.
- Chaque cas n'empiète sur aucun autre.
  $\hookrightarrow$ Ceci est assuré par le fait que les événements d'un système complet d'événements sont 2 à 2 incompatibles.

Vous avez déjà rencontré la formule des probabilités totales auparavant, mais sans doute dans le contexte des *arbres de probabilité*. Avec la représentation suivante pour le cas $n = 3$:



Dès à présent, vous conservez naturellement le droit de penser en termes d'arbres de probabilités si cela vous aide, cependant un tel arbre ne sera plus considéré comme une preuve correctement formalisée. Autrement dit, votre rédaction ne doit pas s'appuyer sur les arbres, mais sur la formule des probabilités totales.

3.2.3 Formule de Bayes ou probabilité des causes

Elle relie les deux probabilités symétriques $\mathrm{P}_B(A)$ et $\mathrm{P}_A(B)$.

Théorème 32 - Formule de Bayes.

(i) Si $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont deux événements de probabilités NON NULLES, alors

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}\mathrm{P}_A(B)\,. \tag{1}$$

(ii) Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements de probabilités NON NULLES et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement de probabilité NON NULLE, alors, pour tout $j \in [\![1\,,n]\!]$,

$$\mathrm{P}_B(A_j) = \frac{\mathrm{P}(A_j)\,\mathrm{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}_{A_i}(B)}. \tag{2}$$

Démonstration.

(i) La première égalité s'obtient via la formule de symétrie du second point du théorème **??**.

(ii) L'assertion **(ii)** est un mélange de **(i)** et de l'écriture de $\mathrm{P}(B)$ via la formule des probabilités totales.

■

Exemple 33 On reprend l'exemple précédent. Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

En effet, La famille $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, ainsi

$$\mathrm{P}_{B_2}(B_1) = \frac{\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)}{\mathrm{P}(B_2)} = \frac{\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)}{\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2) + \mathrm{P}(\overline{B_1})\,\mathrm{P}_{\overline{B_1}}(B_2)} = \frac{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12}}{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12}}$$

$$= \frac{\cancel{5} \times 4}{\cancel{13 \times 12}} \times \frac{\cancel{13 \times 12}}{\cancel{5} \times 4 + 8 \times \cancel{5}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Remarque 34 - Formule des causes. La formule de Bayes est également connue sous le nom de *formule des causes*. Si l'on reprend l'exemple précédent, l'événement B_2 est postérieur à l'événement B_1. On cherche à connaître la probabilité de B_1, qui est une cause possible de l'événement B_2, sachant que la conséquence B_2 s'est réalisée. Autrement dit, on cherche à mesurer l'influence que B_1 a eue dans la réalisation de B_2 et ainsi savoir si B_1 est une cause probable de B_2.

Exercice 35 On considère une population atteinte par une maladie rare touchant une personne sur 10 000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99% ;
- si une personne est saine, le test peut se révéler positif à hauteur de 0,1% (on parle de faux positif).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?

En effet, Nous allons calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

1. Notations.
   - On note M l'événement « la personne est malade » ;
   - On note T l'événement « le test est positif ».
2. Traduction des données de l'énoncé.
   D'après l'énoncé : $\mathrm{P}(M) = \dfrac{1}{10\,000}$, $\mathrm{P}_M(T) = \dfrac{99}{100}$ et $\mathrm{P}_{\overline{M}}(T) = \dfrac{1}{1000}$.
3. Utilisation de la formule de Bayes pour le calcul de $\mathrm{P}_T(M)$.
   La famille $(M, \overline{M})$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles et, d'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_T(M) &= \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}_M(T)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}_M(T)}{\mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}_M(T) + \mathrm{P}\big(\overline{M}\big)\,\mathrm{P}_{\overline{M}}(T)} \\
&= \frac{\frac{1}{10\,000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{10\,000} \times \frac{99}{100} + \frac{9999}{10\,000} \times \frac{1}{1000}} = \frac{99}{\cancel{10\,000 \times 100}} \times \frac{\cancel{10\,000 \times 1000}\ 10}{990 + 9999} \\
&= \frac{990}{10\,989} \leqslant \frac{990}{10\,000} = 9,9\%.
\end{aligned}$$

   Ainsi, un peu moins de 10% des personnes positives au test sont réellement atteintes par la maladie. Ce test est donc peu fiable, menant à beaucoup trop de faux positifs.

4 Événements indépendants

Dans cette section, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 36 - Paire d'événements indépendants. Deux événements A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont dits *indépendants (pour la probabilité* P) lorsque

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,.$$

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on en déduit immédiatement la caractérisation suivante.

Théorème 37 Soit A et B deux événements de $\mathscr{P}(\Omega)$. Si $\mathrm{P}(A) \neq 0$, alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants (pour P)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}_A(B)\,.$$

Remarque 38 La caractérisation précédente est limpide, puisqu'elle exprime que la probabilité de réalisation de l'événement B est la même que celle de l'événement « B sachant A », ce qui suggère bien l'absence d'influence de A sur B.

✎ En pratique ✎

- L'indépendance de deux événements peut se justifier par les modalités de l'expérience. Par exemple, lors de deux lancers successifs d'un dé, le résultat du premier jet n'influe pas celui du second, ainsi tous les événements liés uniquement au premier jet seront indépendants de ceux liés au second. On peut alors calculer aisément la probabilité d'une intersection de deux tels événements.
- Pour établir par le calcul l'indépendance de deux événements A et B, on calcule explicitement $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}_B(A)$ (ou $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}_A(B)$) et on vérifie que ces deux probabilités sont égales.

Exemple 39 On lance un dé cubique équilibré, ainsi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et on considère les événements :

- A : « le résultat obtenu est inférieur à 2 » ;
- B : « le résultat obtenu est supérieur à 4 ».

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants.
Reprendre l'expérience dans le cas d'un dé pipé qui ne sort que 1, 2 et 3.

La notion d'indépendance n'est pas intrinsèque aux événements, mais dépend fortement de la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire considérée.

✖ Attention ! ✖ Il ne faut donc pas confondre, pour deux événements A et B, les deux notions suivantes :

- A et B sont incompatibles : notion intrinsèque aux événements et qui ne dépend d'aucune probabilité.
- A et B sont indépendants : notion qui dépend de la probabilité P choisie sur Ω.

Précisément,

$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour P)},$$

comme l'illustre l'exemple précédent. Et

$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Leftarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour P)},$$

comme l'illustre l'exemple qui suit.

Exemple 40 On lance deux fois un dé à 6 faces, l'univers est $\Omega = [\![1\,, 6]\!]^2$, et on considère les événements

- A : « le premier chiffre est pair » ;
- B : « le second chiffre est impair ».

Le dé est supposé équilibré et on munit Ω de la probabilité uniforme, notée P.
On a alors $\mathrm{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{3 \times 6}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$ et, de même, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$. Or

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4} = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,.$$

En effet, $A \cap B = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$. Ainsi A et B sont indépendants (pour P) et ne sont pas incompatibles. Pour l'indépendance, on aurait plus simplement pu arguer du fait que les deux lancers sont indépendants.

Théorème 41 - Indépendance vs complémentaire. Si A et B sont deux événements indépendants, alors

(i) A et $\overline{B}$ sont indépendants ; **(ii)** $\overline{A}$ et B sont indépendants ; **(iii)** $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration.

- D'après le point **(ii)** du théorème **??**,

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) \underset{(\star)}{=} \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\,(1 - \mathrm{P}(B)) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(\overline{B})\,,$$

ce qui établit **(i)**, l'égalité $(\star)$ étant vrai par indépendance de A et B.
- La démonstration de **(ii)** est totalement similaire et **(iii)** résulte de **(i)** et **(ii)**.

■

4.2 Indépendance mutuelle

Définition 42 - Indépendance mutuelle, indépendance deux à deux. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$.

(i) Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits *deux à deux indépendants (pour la probabilité* P*)* lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \mathrm{P}(A_i \cap A_j) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(A_j)\,.$$

(ii) Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits *(mutuellement) indépendants (pour la probabilité* P*)* lorsque

$$\forall\, I \subset [\![1\,,n]\!], \quad \mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)\,.$$

Afin de saisir la nuance entre ces deux notions, détaillons la définition précédente pour une famille de 3 événements (A_1, A_2, A_3).

- Les événements A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,, \quad \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_3) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3)\,.$$

- Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,, \quad \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_3)\,, \quad \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3)$$
$$\text{ET} \quad \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(A_3)\,.$$

✖ **Attention !** ✖ $\boxed{\text{(Mutuellement) indépendants} \implies \text{Deux à deux indépendants}}$ – mais la réciproque est fausse !

Exemple 43 On considère à nouveau l'expérience aléatoire de l'exemple **??** consistant à lancer deux fois un dé et on considère les événements

• A : « le premier chiffre est pair » ; • B : « le second chiffre est impair » ; • C : « la somme des chiffres est paire ».

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

En effet,

1. Démontrons que A, B et C sont deux à deux indépendants.
   - On a déjà établi l'indépendance de A et B.
   - $\mathrm{P}(A \cap C) = \dfrac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \dfrac{3^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$, en effet $A \cap C = \{2,4,6\}^2$, et, de même, $\mathrm{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$.
   - La famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements et, via la formule des probabilités totales,

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}\big(\overline{A} \cap C\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

   - On vérifie alors que $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C)$ et $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C)$.
2. Démontrons que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

• $A \cap B \cap C = \varnothing$, ainsi $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$. • Or $\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Le résultat suivant généralise celui du théorème **??**

Théorème 44 - Indépendance vs complémentaires.
Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$. Pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, B_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$.

(i) Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants, alors les événements $B_1, \dots, B_n$ le sont également.

(ii) Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants, alors les événements $B_1, \dots, B_n$ le sont également.

Démonstration.

(i) Résulte directement du théorème **??**.

(ii) Il suffit de démontrer que les événements obtenus en niant un seul des A_i sont mutuellement indépendants. Démontrons alors sans perte de généralité que $A_1, \dots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants.

Soit I un sous-ensemble de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal supérieur à 2. Si $n \notin I$, il n'y a rien à démontrer, par hypothèses sur les $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$. Si $n \in I$, posons $I = \{i_1, \dots, i_k, n\}$, où $k = \mathrm{Card}(I) - 1$. Alors, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_n\right) + \mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap \overline{A_n}\right)$$

et, par indépendance mutuelle des $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$$\mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap \overline{A_n}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(A_{i_j}\big) - \left(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(A_{i_j}\big)\right) \times \mathrm{P}(A_n) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(A_{i_j}\big) \times (1 - \mathrm{P}(A_n)) = \left(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(A_{i_j}\big)\right) \times \mathrm{P}\big(\overline{A_n}\big).$$

■

Exemple 45 Un jeu de 32 cartes a été truqué de telle sorte qu'une carte autre que l'as de pique a été remplacée par un second as de pique. On répète alors n fois avec remise l'expérience consistant à tirer simultanément 4 cartes. À partir de quelle valeur de n la probabilité de déceler l'escroquerie est-elle supérieure ou égale à $0,9$?

En effet,

- Commençons par calculer la probabilité de déceler l'escroquerie en un seul tirage. On se place pour cela dans l'univers Ω des 4-combinaisons des 32 cartes du jeu, muni de la probabilité uniforme. L'événement A « L'escroquerie est décelée » correspond à l'ensemble des tirages contenant les deux as de pique. On obtient donc un tel tirage en choisissant les deux autres cartes du tirage, soit une 2-combinaison de l'ensemble des 30 cartes du jeu qui ne sont pas les as de pique, d'où

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \frac{3}{248}.$$

- Ensuite, pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$, notons A_k l'événement « L'escroquerie est décelée au k^{e} tirage » et B l'événement « L'escroquerie finie par être décelée ». Les n tirages se faisant avec remise, les événements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, ainsi :

$$\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}\big(\overline{B}\big) = 1 - \mathrm{P}\big(\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_n\big) = 1 - \mathrm{P}\big(\overline{A}_1\big) \dots \mathrm{P}\big(\overline{A}_n\big) = 1 - \left(1 - \frac{3}{248}\right)^n = 1 - \left(\frac{245}{248}\right)^n.$$

Finalement,

$$\mathrm{P}(B) \geqslant 0,9 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{245}{248}\right)^n \leqslant \frac{1}{10} \quad\Longleftrightarrow\quad n \geqslant \frac{-\ln 10}{\ln\left(\frac{245}{248}\right)} \quad\underset{n\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow}\quad n \geqslant \left\lfloor \frac{-\ln 10}{\ln\left(\frac{245}{248}\right)} \right\rfloor + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad n \geqslant 190.$$