Chapitre 28 - Fonctions de deux variables

Dans ce chapitre on va étudier des fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ces fonctions interviennent dans de nombreux domaines d'applications et forment un cadre riche et complexe par rapport aux fonctions classiques d'une variable réelle.

1 Fonctions de deux variables définies sur des ouverts

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et continuité

Commençons par des définitions géométriques déjà vues :

Définition 1 - Boules ouvertes. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. La norme euclidienne de u, notée $\|u\|$, est définie par

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elle représente la distance euclidienne à l'origine.
Soit $a \in \mathbb{R}^2$, et $r > 0$. On définit la *boule ouverte* de centre a et de rayon r, note $B(a, r)$, comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$B(a, r) = \{u \in \mathbb{R}^2, \|a - u\| < r\}.$$

Notez qu'une boule ouverte porte parfois le nom de *disque ouvert*. Le caractère ouvert d'une boule est lié à l'inégalité stricte dans la définition, attention donc à ne pas confondre avec une inégalité large, pour laquelle la boule peut être dite « fermée ».

La notion de continuité pour une fonction de deux variables est encore plus subtile que dans le cas réel, car il y a de nombreuses manières « d'approcher » un point. La définition suivante définit des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ adéquats pour se rapprocher d'un point dans « toutes les directions ».

Définition 2 - Ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors on dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ lorsque pour tout $\in \mathbb{R}^2$, il existe une boule ouverte centrée en a incluses dans A, autrement dit lorsque

$$\forall a \in A, \exists r > 0, \quad B(a, r) \subset A.$$

Cette définition est subtile car le rayon de la boule en question dépend du point a !

Exemple 3 - Exemples de parties ouvertes. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ?

1. Le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
2. Une boule ouverte.
3. Une droite.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.

✎ **En pratique** ✎ Là où montrer manuellement qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte peut s'avérer technique, un dessin peut être très convainquant.

Définition 4 - Continuité d'une fonction de deux variables. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit $(x_0, y_0) \in U$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) (ou : au point (x_0, y_0)) lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in U, \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \eta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \epsilon.$$

On dit que f est continue sur U lorqu'elle est continue en tout point de U.

Montrer la continuité peut-être délicate, nous disposons du résultat suivant qui rappelle le cadre des fonctions de la variable réelle :

Proposition 5 - Continuité d'une fonction de deux variables. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors

1. Toute combinaison linéaire, produit, et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur U est une fonction continue sur U.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $f : U \to I$ deux fonctions continues. Alors la composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

✎ **En pratique** ✎ Pour montrer qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est continue, on fera appel dans la majeure partie des cas au résultat précédent. Il peut arriver que l'on ait à traiter le cas d'un point $(x_0, y_0) \in U$ manuellement. On peut alors chercher à majorer $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$ par une quantité proche de 0 lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0), c'est-à-dire lorsque $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$ est petit. En dernier recours, on peut travailler avec les coordonnées polaires.

Attention, notre notion de limite dans $\mathbb{R}^2$ reste informelle ! Ces notions existent mais sont délicates et hors programme.

Exemple 6 - Continuité d'une fonction. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ avec le résultat précédent.
2. Montrer à la main que f est continue en $(0,0)$.

1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Définition 7 - Applications partielles. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit $(x_0,y_0) \in U$. On appelle applications partielles associées à f en (x_0,y_0) les fonctions $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0,y_0)$ et $f_{y_0} : x \mapsto (x,y_0)$.

Exemple 8 - Exemples d'applications partielles. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y + 2x$$

Décrire les applications partielles en un point (x_0,y_0).

Définition 9 - Surface associée à une fonction de deux variables. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables continue. L'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x,y) \in U$ et $z = f(x,y)$ est appelé surface représentative de f.

Une surface représentative est à une fonction de deux variables ce qu'une courbe représentative est à une fonction d'une variable réelle.

Pour mieux se représenter une surface représentative d'une fonction f de deux variables, on peut noter le point suivant : pour $(x_0,y_0) \in U$, la courbe représentative de l'application partielle f_{x_0} (respectivement, f_{y_0}) est l'intersection de la surface représentative de f et du plan vertical $x = x_0$ (respectivement, $y = y_0$).

De même, pour $k \in \mathbb{R}$ fixé, il peut être interéressant de tracer l'intersection l'intersection d'une surface représentative de f avec le plan horizontale $z = k$. La courbe ainsi dessinée est appelée *ligne de niveau* k de f.

Exemple 10 - Un exemple facile : le paraboloïde. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Tracer la surface représentative de f, et décrire ses lignes de niveau.

2 Dérivées partielles

Définition 11 - Applications partielles. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit $(x_0, y_0) \in U$. On appelle On appelle dérivées partielles de f en (x_0, y_0) les limites suivantes, lorsqu'elles existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Remarque 12 - Lien avec les applications partielles. Avec les notations de la définitions partielles, les dérivées partielles sont exactement les dérivées $f'_{x_0}(y_0)$ et $f'_{y_0}(x_0)$ des applications partielles au point x_0 (resp. y_0), évaluées en y_0 (resp. x_0).
Par ailleurs, il y a une ambiguïté dans la notation : les variables sont muettes, et $\frac{\partial f}{\partial x}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la première variable. Ainsi en thermodynamique par exemple, la notaton $\frac{\partial P}{\partial T}$ sous-entend qu'on a défini la pression comme une fonction plusieurs variables, qu'on les a toutes figées, sauf la température, puis qu'on a dérivé la fonction obtenue.

✎ **En pratique** ✎ Le calcul pratique des dérivées partielles est un élément important qui demande de la pratique. Pour calculer une dérivée partielle, disons $\frac{\partial f}{\partial x}$, il y a deux cas de figures :

- Quand tout va bien (la majorité des cas), c'est-à-dire quand on a une expression que l'on peut dériver grâce aux règles usuelles, on « gèle » la deuxième variable, et on dérive la fonction par rapport à la première variable. Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$ se fait de la même manière en intervertissant les variables.
- En un point où la fonction semble être une forme indeterminée, on revient à la définition, ce qui est l'analogue de revenir au taux d'accroissement pour un calcul de dérivée problématique.

Définition 13 - Fonctions de classe C^1 sur un ouvert. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On dit que la fonction est de classe C^1 sur U lorsque les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.

Il existe une définition plus profonde liée au fait d'être C^1 : celle de différentiabilité, mais c'est hors programme. On retiendra seulement que les notions de continuité et de classe C^1 pour une fonction de deux variables sont plus subtiles qu'il n'y paraît.

Exemple 14 - Calculs faciles de dérivée partielle. Montrer que les fonctions suivante sont de classe C^1 sur leurs ensembles de définitions, et calculer leurs dérivées partielles :

1. $(x, y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. **2.** $(x, y) \mapsto xye^{\cos x}$ sur $\mathbb{R}^2$. **3.** $(x, y) \mapsto x^y$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exemple 15 - Un calcul de dérivée partielle avec un point délicat. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Calculer ses dérivées partielles et montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 16 - Développement limité à l'ordre 1 en un point. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur U, et soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0) qui est donné par :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \to 0}{=} f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|).$$

C'est l'analogue de la formule de Taylor-Young, mais avec deux variables ! Notez que l'on peut écrire, lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Corollaire 17 - Lien avec la continuité. Toute fonction de classe C^1 sur un ouvert U est continue sur U.

La fonction apparaissant dans ce développement de Taylor est une fonction affine, mais de deux variables. Sa surface représentative est un plan, qui joue le rôle de tangente pour la surface représentative de f au point (x_0, y_0) :

Définition 18 - Plan tangent en un point. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur U, et soit $(x_0, y_0) \in U$. On pose $z_0 = f(x_0, y_0)$. Alors le plan déquation

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est le plan tangent à la surface représentative de f, d'équation $z = f(x, y)$, au point (x_0, y_0).

✎ En pratique ✎ N'apprenez pas par coeur ces formules, mais retrouvez-les à partir de l'équation de la droite tangente à une courbe : c'est très proche, mais avec deux variables, et donc des dérivées partielles !

Exemple 19 - Equation de plan tangent. Déterminer un développement limité à l'ordre 1 ainsi qu'une équation de plan tangent pour les fonctions suivantes, issues de l'exemple 14 :

1. $(x, y) \mapsto x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$ en $(0, 0)$. **2.** $(x, y) \mapsto xye^{\cos x}$ en $(0, 0)$. **3.** $(x, y) \mapsto x^y$ en $(1, 0)$.

Définition 20 - Gradient en un point. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur U, et soit $(x_0, y_0) \in U$. On appelle *gradient* de f en (x_0, y_0), et on note $\nabla f(x_0, y_0)$, le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Remarque 21 - En ligne ou en colonne ?. Le gradient est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, il peut être noté en ligne ou en colonne. Le tout est d'être cohérent avec les autres vecteurs que vous manipulez.

Remarque 22 - Vision géométrique du gradient via le DL. L'équation du plan tangent en (x_0, y_0) s'écrit alors

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

et fait encore une fois penser à l'équation de la tangente à une courbe.
Sous les hypothèses du Théorème 16, le développement limité de f en (x_0, y_0) peut s'écrire :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|).$$

Si on note $u_0 = (x_0, y_0)$ et $\vec{v} = (h, k)$ le petit déplacement (on peut mettre une flèche pour renforcer l'aspect visuel), alors cela se réécrit

$$f(u_0 + \vec{v}) = f(u_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} + o(\|\vec{v}\|).$$

Comment faire augmenter f le plus possible en quittant le point u_0 ? Si $\nabla f(u_0) \neq 0$, il suffit de prendre $\vec{v}$ petit et aligné (dans le même sens) avec $\nabla f(u_0)$. Ainsi, le vecteur $\nabla f(u_0)$, dans le plan (Oxy), indique la direction de plus grande pente en partant du point (u_0, y_0), le long de la surface représentative de f.
Attention, ce raisonnement heuristique ne tient pas compte du reste $o(\|\vec{v}\|)$: il est *local*, c'est-à-dire qu'il permet de décrire l'allure de la surface représentative de f au point u_0, mais pas ailleurs.

3 Dérivées partielles et composées

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$. La question à se poser avant d'attaquer est la suivante : comment peut-on dériver une composée $f \circ \varphi$, où φ est une fonction à valeurs dans U ? La formule du cas des fonctions réelles, $\varphi' \times f' \circ \varphi$, n'a pas de sens car f est une fonction de deux variables.

Définition-Proposition 23 - Dérivée selon une direction. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$, et soit $\vec{v} = (h, k)$ non nul. On dit que la fonction f est dérivable selon le vecteur (ou : dans la direction) $\vec{v}$ lorsque la fonction

$$\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

est dérivable en 0.
Pour les directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, on retrouve les dérivées partielles :

$$\varphi'_{\vec{e_1}}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \varphi'_{\vec{e_2}}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

On peut noter que la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ est bien définie dans un voisinage de 0 car f est définie sur un voisinage de (x_0, y_0). Le fait que U est ouvert intervient !

Définition-Proposition 24 - Dérivée selon une direction : expression avec le gradient. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$, alors f admet une dérivée selon tout vecteur non nul $\vec{v} = (h, k)$, qui est donnée par

$$\varphi'_{\vec{v}}(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \vec{v} \cdot \nabla f(x_0, y_0).$$

Dans la suite on va dériver la fonction f restreinte à une « courbe » de $\mathbb{R}^2$. Visuellement, on ressent qu'il s'agit d'étudier une fonction de la variable réelle, mais le fait que f dépend de deux variables va compliquer les choses.

Définition 25 - Arc paramétré. Soit $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classes C^1. Alors la fonction $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, est appelé un arc paramétré. On note $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ le vecteur dérivée.

Théorème 26 - Dérivée le long d'un arc : règle de la chaîne. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R}^2$ un arc paramétré, avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tel que $\gamma(I) \subset U$. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$, définie par $F = f \circ \gamma$, est de classe C^1 sur I, et on a

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \gamma'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t))$$

Exemple 27 - Un calcul. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2 e^{3x + \sin y}$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (\ln(1 + t^2), t^2)$. Déterminer la dérivée $(f \circ \gamma)'$ par la règle de la chaine. Le calcul direct semble-t-il intéressant ?

Exemple 28 - Restriction à une parabole. Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $F : x \mapsto f(x, x^2)$, c'est-à-dire que F est la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f.

La proposition suivante, qui s'intuite grâce au théorème 26 demande d'admettre plusieurs éléments géométriques :

Proposition 29 - Gradient et ligne de niveaux. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Soit $k \in \mathbb{R}$, et soit $f(x, y) = k$ la ligne de niveau associé. En un point (x_0, y_0) de cette ligne de niveau tel que $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, la ligne de niveau est régulière, et le gradient de f est orthogonal à la ligne de niveau.

Exemple 30 - Tangente à une ellipse. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

appelée ellipse. Déterminer l'équation de la tangente à un point de cette courbe.

Théorème 31 - Dérivée partielle d'une composée : encore la règle de la chaîne. Soit U et V un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soient $\varphi : V \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. On note, pour $(x,y) \in V$, $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$, où φ_1 et φ_1 sont des fonctions de V dans $\mathbb{R}$, appelées fonctions coordonnées de φ.
Alors la fonction $g : V \to \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \varphi$ est de classe C^1, et on a pour $(x_0, y_0) \in V$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x_0,y_0)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x_0,y_0)) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x_0,y_0)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x_0,y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x_0,y_0)) \end{array}\right.$$

✎ **En pratique** ✎ Ces formules sont parfois abrégées en

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right. ,$$

avec une ambigüité sur les points où sont évaluées les dérivées partielles.
Dans tous les cas, pour retrouver $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x}$, retenez que vous cherchez à dériver $x \mapsto f(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$, et fiez-vous à vos réflexes pour dériver une composée. La méthode est analogue pour calculer $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y}$

4 Extrema d'une fonction de deux variables

Notez que l'on dit « extrema » ou « extremums » selon que l'on parle latin ou français.

Définition 32 - Extrema.

Exemple 33 - Trouver manuellement des extrema. Déterminer les extrema globaux des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, en précisant les points pour lesquels ces extrema sont atteints :

1. $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Et sur le disque unité fermé ? **2.** $(x,y) \mapsto -(x+1)^2$. **3.** $(x,y) \mapsto \cos(xy)$.

Théorème 34 - Point critique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. On dit que $(x_0,y_0) \in U$ est un point critique de f lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0,$$

autrement dit lorsque $\nabla f(x_0,y_0) = 0$.

On a une condition nécessaire analogue aux fonctions de la variable réelle :

Théorème 35 - Condition nécessaire pour un extremum local. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Si f a un extremum local en (x_0,y_0), alors (x_0,y_0) est un point critique de f.

✖ **Attention !** ✖ La logique est importante ! Tous les points critiques ne sont pas des extrema, et tous les extrema locaux ne sont pas des extrema globaux. Trouver les extrema d'une fonction ne se résume pas à trouver des points critiques.
Par ailleurs, une fonction peut avoir un extrema "au bord" sans qu'il 'agisse d'un point critique, pensez à $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ sur le disque unité fermé.
Le lien entre les notions d'extrema et de points critiques donne lieu aux implications suivantes :

$$\boxed{\text{Extremum global}} \rightarrow \boxed{\text{Extremum local}} \rightarrow \boxed{\text{Point critique}}$$

Exemple 36 - Un point critique qui n'est pas un extremum. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2-y^2$. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique, mais pas un extremum local.

✎ **En pratique** ✎ Si vous avez compris la subtilité, alors vous avez maintennt une condition nécessaire pour trouver des extrema : on peut commencer par trouver les points critiques pour faire apparaitre les candidats. En résumé, la méthode de recherche d'extrema pour une fonction f de classe C^1 peut être la suivant :

1. Vérifier si la réponse n'est pas évidente, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. Vérifier que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.
3. Chercher les points critiques de f. Cela revient à résoudre deux équations à deux inconnues, en général non linéaires.
4. Pour chaque point critique (x_0, y_0) , étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$, au voisinage de (x_0, y_0) pour savoir si c'est un extremum local, puis globalement le cas échéant.

La dernière étape se fait manuellement, pensez aux identités remarquables ! L'année prochaine vous verrez de nouveaux outils pour systématiser cette étape.

Exemple 37 - Etude d'extrema. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. Etudier les extrema de f.

Exemple 38 - Etude d'un unique point critique. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + (x+y-1)^2 + y^2$. Etudier les extrema de f.