Chapitre 2 - Les nombres complexes I : première approche et lien avec la géométrie

Ce chapitre inroduit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les principales règles de calculs autour des nombres complexes, ainsi que leurs interprétations géométriques.

Nos objectifs :

- Manipuler algébriquement des nombres complexes à partir de leur forme algébrique. Calculer le conjugué, le module et l'inverse d'un nombre complexe.
- Comprendre le lien entre un nombre complexe z et le point du plan qui a z pour affixe, en particulier intepréter les parties réelles et imaginaires, le conjugué et le module géométriquement.
- Etablir des liens entre la forme trigonométrique (aussi appelée exponentielle) et algébrique d'un nombre complexe. Manipuler des formes exponentielles. Déterminer un argument d'un nombre complexe et comprendre les règles de calculs associées.
- Mettre en relation des transformations du plans (rotation, translation) et des calculs de nombres complexes. Décrire des lieux géométrique à partir d'équations sur $\mathbb{C}$.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1 Définition

Définition-théorème 1 - Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, forme algébrique, parties réelle et imaginaire.

- On admet qu'il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, qui contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et vérifie les propriétés suivantes :
  1. $\mathbb{C}$ contient un nombre i tel que $\boxed{i^2 = -1.}$
  2. Tout nombre complexe z s'écrit d'une et une seule manière sous la forme dite *algébrique* :
  $$\boxed{z=a+ib} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$
  Le réel a est appelé la *partie réelle de z* et noté $\mathrm{Re}(z)$, le réel b est appelé la *partie imaginaire de z* et noté $\mathrm{Im}(z)$.
  3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une opération d'addition (et de soustraction), et d'une opération de multiplication, qui généralisent celles que nous connaissons sur $\mathbb{R}$.
- Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle. Enfin, un nombre complexe de partie réelle nulle est dit *imaginaire pur*. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple 2

- Pour le nombre complexe $z = 12 - 4i$, donner $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, et $z = ai$. Calculer z^2, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- Montrer que $(1 + i)^2$ est imaginaire pur.

✎ **En pratique** ✎ L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe est utilisée fréquemment pour des identifications. Elle permet, face à une égalité $a + ib = a' + ib'$, d'écrire $a = a'$ et $b = b'$. En résumé :

UNE égalité de nombres complexes = DEUX égalités de nombres réels

Les opérations dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$: l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

✖ **Attention !** ✖

En général : $\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$.
En particulier : $\operatorname{Re}(z^2) \neq \operatorname{Re}(z)^2$ et $\operatorname{Im}(z^2) \neq \operatorname{Im}(z)^2$.

En revanche,

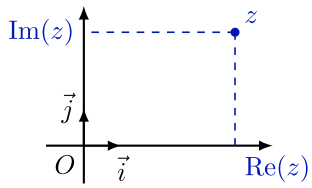
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(az) = a\operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(az) = a\operatorname{Im}(z).$$

✖ **Attention !** ✖

Les inégalités n'ont aucun sens sur $\mathbb{C}$.

Il s'agit là d'une différence essentielle entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. En outre, pour $z \in \mathbb{C}$, lorsque $z^2 \in \mathbb{R}$, on peut avoir $z^2 < 0$! Par exemple, $i^2 = -1$.

Définition 3 - Affixe, image. On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



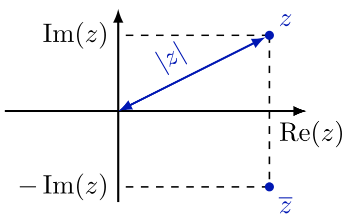
- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le point M du plan de coordonnées (x, y) est appelé l'*image de* z tandis que z est appelé l'*affixe de* M. On dit aussi que z est l'*affixe* du vecteur du plan de coordonnées (x, y).
- **Règles de calcul sur les affixes :**
  1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan d'affixes respectifs z et z' et pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z + \mu z'$.
  2. Pour tous points A et B du plan d'affixes respectifs a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Au fond, les notions de point, vecteur, coordonnées et nombre complexe sont équivalentes. Ainsi, en pratique, on s'autorisera parfois à confondre ces objets. On verra au paragraphe 2.4 que cette interprétation des nombres complexes comme points ou vecteurs du plan sera particulièrement féconde.

Exemple 4 Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, montrer que le milieu du segment joignant z et z' a pour affixe $\dfrac{z + z'}{2}$.

1.2 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 5 - Conjugué, module. Soit $z \in \mathbb{C}$.



- On appelle *conjugué de* z le nombre complexe $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$.
  L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de celle de z par rapport à l'axe (Ox).
- On appelle *module de* z le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.
  Ce nombre est la distance euclidienne entre l'image de z et l'origine O.

Exemple 6 Calculer les quantités suivantes :

1. $\overline{2 - 2i}$, **2.** $\overline{4i}$ et $\overline{2}$, **3.** $|1 + 2i|$.

Remarque 7

- Module et valeur absolue coïncident sur $\mathbb{R}$, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$, ce qui garantit que cette notation commune n'est pas source d'ambiguïté.
- De par sa définition, le module $|z|$ s'interprète comme la norme du vecteur d'affixe z. Ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A, B, le module $|a - b|$ n'est autre que la distance AB. Il en découle que, pour tout $r > 0$,
  - ⋆ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r ;
  - ⋆ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le disque fermé de centre a et de rayon r ;
  - ⋆ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r.

Exemple 8 Déterminer et représenter les ensembles de nombres complexes z qui vérifient :

1. $|z-2+3i| \leqslant 4$ **2.** $|z-i| \geqslant 5$.

Théorème 9 - Inverse d'un complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. On a $z\overline{z} = |z|^2$,
2. Si $z = x+iy \neq 0$, alors z possède un unique inverse, noté $\frac{1}{z}$, qui est donné par

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

En particulier, cela permet de retrouver la propriété bien connue chez les réels :

$$zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

Exemple 10 Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $\dfrac{1}{i}$. **2.** $\dfrac{1+i}{1-i}$.

Théorème 11 - Propriétés du conjugué. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$. **(ii)** $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. **(iii)** $\overline{\overline{z}} = z$.

(iv) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$. **(v)** $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

(vi) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$. **(vii)** $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$. **(viii)** si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. **(ix)** $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration. Exercices. ∎

Exemple 12 Simplifiez les expressions suivantes en trouvant leur forme algébriques :

1. $\overline{(3+i)(5-8i)}$, **2.** $\overline{\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2}$.

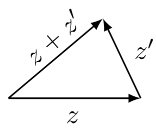
Théorème 13 - Propriétés du module. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- **Propriétés algébriques :** $|\overline{z}| = |z|$, $|z| = 0 \iff z = 0$.

  $|zz'| = |z| \times |z'|$, $|z^n| = |z|^n$ et si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

- **Propriétés géométriques :** $\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leqslant |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

  Inégalité triangulaire : $|z+z'| \underset{(\star)}{\leqslant} |z|+|z'|$, **généralisée :** $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z|+|z'|$.



  $(\star)$ est une égalité si et seulement si z et z' sont, comme vecteurs, colinéaires DE MÊME SENS.

Démonstration. On se contente ici de démontrer l'inégalité triangulaire et sa version généralisée. Les autres propriétés sont laissées en exercices.

- **Inégalité triangulaire.**

$$\begin{aligned} |z+z'| \leqslant |z|+|z'| &\iff |z+z'|^2 \leqslant \left(|z|+|z'|\right)^2 \\ &\iff (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) \leqslant \left(|z|+|z'|\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad |z|^2 + z\overline{z}' + \overline{z}z' + |z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z|\,|z'| + |z'|^2 \\
&\iff \quad \frac{z\overline{z}' + \overline{z}z'}{2} \leqslant |z|\,|z'| \\
&\iff \quad \mathrm{Re}(z\overline{z}') \leqslant |z\overline{z}'|\,.
\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie.

- **Cas d'égalité.** D'après les équivalences précédentes,

$$|z+z'| = |z| + |z'| \quad \iff \quad \mathrm{Re}(z\overline{z}') = |z\overline{z}'| \quad \iff \quad z\overline{z}' \in \mathbb{R}_+,$$

  auquel cas
  - ⋆ si $z' = 0$, z et z' sont naturellement colinéaires de même sens ;
  - ⋆ si $z' \neq 0$, alors $z\overline{z}' \in \mathbb{R}_+ \iff z \times \frac{\overline{z}'}{|\overline{z}'|^2} = \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$, ce qui exprime bien que z et z' sont colinéaires de même sens.
- **Généralisation.** D'après l'inégalité triangulaire, $|z| = |(z+z') + (-z)'| \leqslant |z+z'| + |-z'|$, donc $|z| - |z'| \leqslant |z+z'|$ et, de même, $|z'| - |z| \leqslant |z+z'|$, soit, comme voulu, $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z+z'|$. Enfin l'inégalité sur $|z-z'|$ s'obtient à partir de celle sur $|z+z'|$ par simple substitution de z' par $-z'$.

■

Exemple 14 Déterminez les modules suivants :

1. $|(3+i)(5-8i)|$ **2.** $\left|\frac{1-i}{1+i}\right|$

Exercice 15 Déterminer les complexes z pour lesquels

1. $\frac{2z-i}{z-2i} \in \mathbb{R}$. **2.** $\left|\frac{2z-i}{z-2i}\right| = 1$.

2 Nombres complexes et géométrie

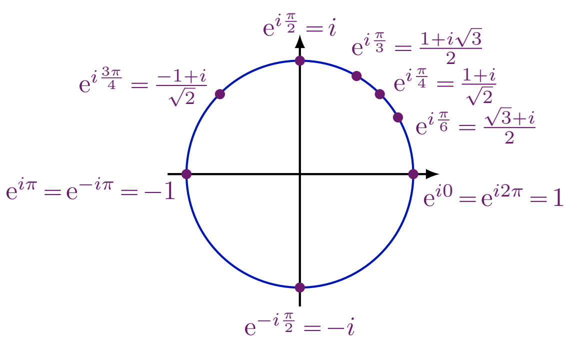
2.1 Nombres complexes de module 1 et forme trigonométrique

Définition 16 - Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. On note $\mathbb{U}$ le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}$, qui s'identifie géométriquement au cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1.

Définition 17 - « Exponentielle $i\theta$ ». Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle (de) $i\theta$*, notée $\mathrm{e}^{i\theta}$, le nombre complexe

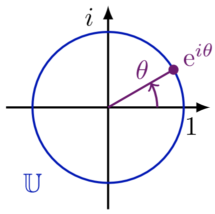
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

La notation $\mathrm{e}^{i\theta}$, qui cache un cosinus et un sinus, n'est qu'une NOTATION. $\mathrm{e}^{i\theta}$ n'est pas « e à la puissance $i\theta$ », ce qui n'a aucun sens (pour nous). Le choix de cette notation se justifie par le comportement similaire à une exponentielle classique de l'« exponentielle $i\theta$ », qui transforme les sommes en produits (cf. théorème 20). En réalité, une notion unique d'exponentielle se cache derrière l'exponentielle réelle et l'« exponentielle $i\theta$ », mais celle-ci sort du cadre de ce cours.



Théorème 18 - Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par l'« exponentielle $i\theta$ ».

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}$. $\quad$ En résumé, $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta}\right\}_{\theta \in \mathbb{R}}$.
- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$.



Démonstration. Il s'agit d'une autre manière de dire que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$, donc un affixe de la forme $e^{i\theta}$ – avec unicité de θ modulo 2π. ∎

Exemple 19

$$\text{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \quad e^{i\theta} = 1 \iff e^{i\theta} = e^{i0} \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi] \iff \theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\text{et} \quad e^{i\theta} = i \iff e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \theta \in \theta \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Théorème 20 - Propriétés algébriques de l'« exponentielle $i\theta$ ». Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

(i) Conjugaison. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

(ii) Formules d'Euler†. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad$ et $\quad$ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(iii) Transformation des sommes en produits. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\, e^{i\theta'}$.

(iv) Formule de Moivre . $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Notez que la première formule est liée à la propriété suivante :

$$z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

2.2 Formes trigonométriques

La définition suivante repose intégralement sur le fait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ NON NUL, $\quad \left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1, \quad$ *i.e.* $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

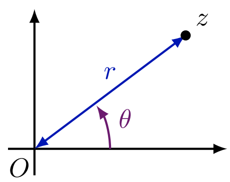
Définition-théorème 21 - Argument(s) et formes trigonométriques.
Toute nombre complexe NON NUL z peut être écrit sous la forme

$$\boxed{z = |z|\, e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$, dites *forme exponentielle* ou encore *forme trigonométrique*. Le réel θ, appelé UN *argument de z*, est unique à 2π près seulement.

Précisément, l'ensemble des arguments de z est $\quad \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Il existe toutefois un et un seul argument de z dans $]-\pi\,,\pi]$ et celui-ci est appelé L'*argument (principal) de z* et noté $\arg(z)$.



✖ **ATTENTION !** ✖ $\quad$ 0 n'a pas de forme trigonométrique et donc pas d'argument.

†. Leonhard Euler (1707 à Bâle – 1783 à Saint-Pétersbourg) est un mathématicien et physicien suisse. Ses travaux mathématiques ont aussi bien touché au calcul infinitésimal qu'à la théorie des graphes. On lui doit notamment la notation $f(x)$ pour les fonctions. On peut considérer qu'il s'agit du père des mathématiques modernes, et peut-être un des plus importants mathématiciens

Remarque 22 Un argument d'un nombre complexe non nul z d'image M n'est rien d'autre qu'une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Exemple 23 Les formes trigonométriques des réels et des imaginaires purs ne doivent pas vous choquer :

$$1 = e^{i0}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad \text{et } i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

✎ **En pratique** ✎ La *forme trigonométrique* s'impose dans les cas où interviennent des produits (et des quotients), ou des puissances entières de nombres complexes non nuls. On a, en effet, via les propriétés de l'« exponentielle $i\theta$ » :

$$r_1 \,\mathrm{e}^{i\theta_1} \dots r_n \,\mathrm{e}^{i\theta_n} = r_1 \dots r_n \,\mathrm{e}^{i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} \qquad \text{et} \qquad \left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}, \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

Corollaire 24 - Propriétés des arguments. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ NON NULS et $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$. **(ii)** $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$.

(iii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$. **(iv)** $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. ... ■

Exemple 25 Mettre le nombre complexe $\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique.

Théorème 26 - Lien entre la forme algébrique et les formes trigonométriques. Soit $z \in \mathbb{C}$ NON NUL de forme algébrique $z = x + iy$ et de forme trigonométrique $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

(i) Expressions de la forme algébrique à partir d'une forme trigonométrique :

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

(ii) Expressions d'une forme trigonométrique à partir de la forme algébrique :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

On aurait pu appeler ce théorème « Lien entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires ». Notez qu'on peut aussi retenir que lorsque $x \neq 0$, l'argument vérifie $\tan\theta = \frac{y}{x}$, ce qui nous donnera une expression de θ avec la fonction Arctan d'ici quelques chapitres.

Démonstration. ... ■

✎ **En pratique** ✎ (**Technique de l'angle moitié**) La technique de l'angle moitié consiste à écrire les complexes de la forme $\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy}$ sous forme « trigonométrique ». Cette technique permet de factoriser des expressions en sinus et cosinus. L'idée, simple, est la suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{i(x+y)}{2}}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(x-y)}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Mise en facteur de l'ANGLE MOITIÉ $\dfrac{x+y}{2}$.

En réalité, le résultat obtenu n'est pas nécessairement la forme trigonométrique de $\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy}$, puisque $\cos\dfrac{x-y}{2}$ peut être négatif, mais nous en sommes proche. Cette technique s'adapte évidemment au cas des complexes de la forme $\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{iy}$.

Exemple 27 Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser $1 - e^{ix}$ et $1 + e^{ix}$. En déduire leurs modules et leurs arguments selon la valeur de x. Retrouver les résultats en passant par la forme algébrique.

Exemple 28 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, (re)démontrer que $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$. (Re)trouver une formule similaire pour $\cos x + \cos y$.

2.3 Exponentielle complexe

Nous disposons à ce stade de deux exponentielles, l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et l'« exponentielle $i\theta$ ». Plus généralement :

Définition 29 - Exponentielle complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle *exponentielle complexe (de) z* le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}.$$

En d'autres termes : $|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^{z}) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$. En particulier, $\mathrm{e}^{z} \neq 0$.

Exemple 30 Mettre $\mathrm{e}^{2+i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.

Remarque 31 La fonction $z \longmapsto \mathrm{e}^{z}$ prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, puisque, lorsque $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)} = 1$. De même, pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'« exponentielle $i\theta$ » définie au paragraphe 2.1 représente l'exponentielle complexe du complexe imaginaire pur $i\theta$.

Théorème 32 - Propriétés de l'exponentielle complexe.

(i) Périodicité. L'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, *i.e.* pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+2i\pi} = \mathrm{e}^{z}$.
On dispose en fait d'un résultat plus précis : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\ [2i\pi]$.

(ii) Transformation des sommes en produits. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{z'}$.

Démonstration. ... ■

Exemple 33 Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{z} = 1 + i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

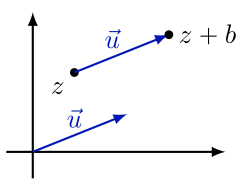
2.4 Interprétation géométrique des nombres complexes

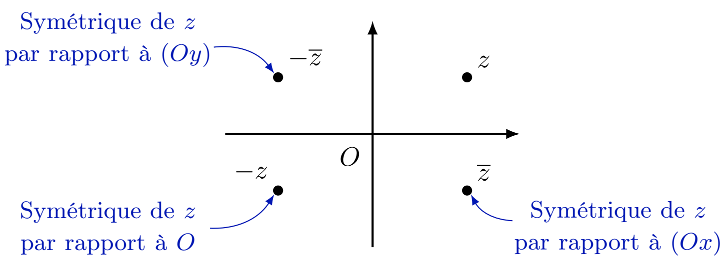
Théorème 34 - Transformations géométriques et nombres complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$, et M son image.

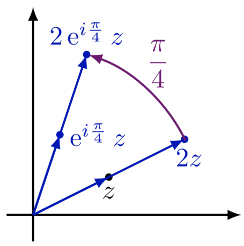
1. (Translation). Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $b \in \mathbb{C}$. Alors $z + b$ est l'affixe du vecteur $\vec{OM} + \vec{u}$.
2. (Homothétie). Soit $r \in \mathbb{R}^*$. Alors rz est l'affixe du vecteur $r\vec{OM}$.
3. (Rotation). Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors $e^{i\theta}z$ est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$ après une rotation d'angle θ.
4. (Symétrie). Le conjugué $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à (Ox), tandis que $-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à O

Notez qu'on peut les combiner en composant les opérations. Les figures ci-dessous illustrent ces transformations :

- l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation ;
- deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples ;
- le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.







La figure 3 montre une composition de transformation : elle illustre la transformation $z \mapsto 2e^{i\frac{\pi}{4}}z$, qui est la composée de l'homothétie de rapport 2, puis de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Théorème 35 - Interprétation géométrique de $\dfrac{z-b}{z-a}$. Soit $a, b, z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq a$ et $z \neq b$. On note A, B et M les images respectives de a, b et z. Alors : $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$ et $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi]$.

Démonstration. On a d'une part

$$\left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \left|\frac{b-z}{a-z}\right| = \frac{|b-z|}{|a-z|} = \frac{MB}{MA}$$

et d'autre part, en considérant $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan,

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) \equiv \arg(b-z) - \arg(a-z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{MB}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi].$$

■

✎ **En pratique** ✎ Avec les notations du théorème, on peut établir l'alignement des points A, B et M ou l'orthogonalité des droites (AM) et (BM) grâce aux équivalence suivante :

$$A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}.$$

$$(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exemple 36 Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z-1| = |z+1|$.

Exemple 37 Soit Ω un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et A un autre point d'affixe $a \in \mathbb{C}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on effectue une rotation de centre Ω et d'angle θ du point A, et on note B le point obtenu.
Faire un dessin, puis écrire l'affixe b du point B en fonction de a, ω et θ.

Exemple 38 Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, Montrer que l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est rectangle en z est constitué de la droite verticale d'équation $x = -1$.

En effet, pour $z \in \mathbb{C}$, on considère le rapport $\dfrac{z^3-z}{z^2-z}$, ce qui est possible, puisque $z \notin \{0,1\}$ (pour ces deux points, le triangle de sommets z, z^2 et z^3 est réduit à un point). Ceci dit, le triangle z, z^2 et z^3 est rectangle en z si et seulement si

$$\frac{z^3-z}{z^2-z} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \in i\mathbb{R} \iff z+1 \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z+1) = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = -1.$$

On a considéré des quotients de la forme $\frac{z-a}{z-b}$, impliquant trois nombres complexes $(a,b,z) \in \mathbb{C}^3$ avec $b \neq z$, mais le paragraphe pécédent s'adapte facilement pour des quotients de la forme $\frac{m-n}{p-q}$ impliquant quatre nombres complexes $(m,n,p,q) \in \mathbb{C}^4$ quelconques avec $p \neq q$. Voici un exercice typique :

Exemple 39 Soit M, N, P et Q quatre points distincts d'affixes respectives m, n, p et q d'un cercle de centre O et de rayon ρ. Montrer que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles si et seulement si $mn = pq$.

En effet,

$$\begin{aligned}
& (MN) \text{ et } (PQ) \text{ parallèles} \\
\iff\ & \frac{m-n}{p-q} \in \mathbb{R} \qquad (\text{ car } P \neq Q \implies p-q \neq 0) \\
\iff\ & \frac{m-n}{p-q} = \frac{\overline{m}-\overline{n}}{\overline{p}-\overline{q}} = \frac{\frac{\rho^2}{m}-\frac{\rho^2}{n}}{\frac{\rho^2}{p}-\frac{\rho^2}{q}} = \frac{n-m}{q-p}\,\frac{pq}{mn} \\
\iff\ & \frac{pq}{mn} = 1 \qquad (\text{ car } M \neq N \implies m-n \neq 0) \\
\underset{mn\neq 0}{\iff}\ & mn = pq.
\end{aligned}$$