Chapitre 3 - Calculs algébriques : Sommes, produits, coefficients binomiaux

1 Sommes

1.1 Définition

Définition 1 - Somme.

- Pour tous $z_m, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, avec $m \leqslant n$ deux entiers, la somme $z_m + z_{m+1} + \dots + z_n$ sera notée
$$\sum_{k=m}^{n} z_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{m \leqslant k \leqslant n} z_k,$$
et on lira « Somme pour k allant de m à n des z_k ». Le symbole Σ (lire « sigma », lettre majuscule de l'alphabet grec) indique donc que l'on somme les nombres z_k et l'on précise entre quelles valeurs l'indice k varie (ou dit autrement : les valeurs *parcourues* par l'indice k).
- Plus généralement, si I est un sous-ensemble fini et non vide de $\mathbb{Z}$ et $(z_i)_{i \in I}$ une famille de nombre complexes indexée par I, on note $\sum_{i \in I} z_i$ la somme des éléments de la famille $(z_i)_{i \in I}$.

  Par convention, lorsque I est vide, $\sum_{i \in I} z_i = 0$.

Notez que cette notation a pour but de préciser le sens de des ... qui interviennent parfois dans une somme (ou dans un produit, voir le dernier paragraphe). En particulier, elle va nous ouvrir des possibilités de calculs. La présence des ... reste tolérée pour un temps (ou pour des cas simples), mais sera peu à peu délaissée pour le symbole Σ. Dans tous les cas, ne mélangez pas les deux !

Exemple 2

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{p=5}^{3n-1} \sqrt{p} = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{3n-2} + \sqrt{3n-1}$.
- Si $I = \{1, 5, 7, 13\}$, alors $\sum_{i \in I} z_i = z_1 + z_5 + z_7 + z_{13}$.
- Pour tout nombre complexe z et tous entiers m et n, avec $m \leqslant n$,
$$\sum_{k=m}^{n} z = \underbrace{z}_{k=m} + \underbrace{z}_{k=m+1} + \dots + \underbrace{z}_{k=n} = \underbrace{z + z + \dots + z}_{n-m+1 \text{ termes}} = (n - m + 1)\, z.$$

Règle pour les indices de sommes. Quelle lettre peut-on choisir pour l'écriture d'une somme à l'aide du symbole $\sum$? En cas de doute, il suffit simplement d'écrire cette somme en utilisant ..., d'observer quelles variables apparaissent dans cette écriture et de choisir pour indice de sommation N'IMPORTE QUELLE AUTRE LETTRE.

Par exemple, pour « $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ », on peut choisir n'importe quelle lettre : $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} n^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2, \dots$

tandis que pour « $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ », la lettre « n » doit être exclue : $\displaystyle\cancel{\sum_{n=1}^{n} n^2} \neq \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2, \dots$

Doit-on utiliser des indices différents lorsque plusieurs sommes apparaissent dans un calcul ? Que penser par exemple des écritures suivantes : $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$? Les deux sont convenables et symbolisent, en dépit des apparences, la même situation :

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) = (a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

L'indice d'une somme a en réalité une zone d'influence très restreinte comme l'indique le schéma ci-contre. Un indice « mort » peut être recyclé à volonté. La seule chose à éviter est la schizophrénie : une même lettre possède plusieurs significations au même instant.

...bla bla bla $\sum_{k=1}^{n} z_k$ bla bla bla...

Naissance de l'indice k — Mort de k

1.2 Manipulation du symbole Σ

L'extension des règles de calculs dans l'ensemble des nombres complexes, en l'occurrence la commutativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition, mène aux règles suivantes.

Théorème 3 - Linéarité du symbole $\sum$. Soit $x_m, \ldots, x_n$ et $y_m, \ldots, y_n$ des complexes, avec $m \leqslant n$, et α un complexe. On a

$$\sum_{k=m}^{n}(x_k+y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} \alpha x_k = \alpha \sum_{k=m}^{n} x_k.$$

α ne dépend pas de l'indice k, il peut donc être sorti de l'environnement Σ.

Changement d'indice. Une même somme peut toujours être écrite de différentes manières, indépendamment du choix de la lettre-indice, et le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice*. Deux exemples valent mieux qu'un long discours :

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1+\ldots+z_n = \sum_{p=0}^{n-1} z_{p+1}$$

Changement d'indice $k=p+1$, soit $p=k-1$ (*glissement*)

k	1	2	3	...	$n-1$	n
p	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_0+z_1+\ldots+z_n = \sum_{p=0}^{n} z_{n-p}$$

Changement d'indice $k=n-p$, soit $p=n-k$ (*renversement*)

k	0	1	2	...	$n-1$	n
p	n	$n-1$	$n-2$	...	1	0

Pour n'importe quel changement d'indice, il faut toujours garantir que l'on a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale, mais juste modifié la façon de parcourir les éléments de la somme. Il est souvent bon de se rassurer en vérifiant les termes "extrémaux".

Sommes télescopiques. Il arrive fréquemment que lors d'une étape d'un calcul on aboutisse à une somme de la forme « $\sum_{k=\cdots}^{\cdots} z_{k+1}-z_k$ », dite *somme télescopique*. Or ces sommes se simplifient extrêmement bien :

$$\sum_{k=m}^{n} z_{k+1}-z_k = (z_{n+1}\overbrace{-z_n)+(z_n}^{\text{simplification}}\overbrace{-z_{n-1})+(z_{n-1}}^{\text{simplification}}-z_{n-2})+\ldots+(z_{m+2}\overbrace{-z_{m+1})+(z_{m+1}}^{\text{simplification}}-z_m) = z_{n+1}-z_m.$$

Théorème 4 - Simplification télescopique. Pour tous $z_m, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n}(z_{k+1}-z_k) = z_{n+1}-z_m.$$

Exemple 5 $\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \sum_{p=1}^{n}(\ln(p+1)-\ln p) = \ln(n+1)$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$

1.3 Sommes de référence

Ce dernier paragraphe recense des formules concernant des sommes classiques.

Théorème 6 - Somme d'entiers consécutifs, de leurs carrés et de leurs cubes.
Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \leqslant n$,

Dernier terme
Premier terme

$$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)\overbrace{(n-m+1)}^{\text{Nombre de termes}}}{2}, \qquad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration.

- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant m$, soit S la somme $\sum\limits_{k=m}^{n} k$. L'astuce pour déterminer l'expression de S en fonction de m et n consiste à écrire cette somme en sens inverse :

$$\begin{array}{rccccccccc}
S = & m & + & m+1 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\
S = & n & + & n-1 & + & \dots & + & m+1 & + & m \\
\hline
\text{Ainsi, en sommant les deux lignes,} \quad 2S = & n+m & + & n+m & + & \dots & + & n+m & + & n+m
\end{array} = (n-m+1)(n+m)$$

  Formellement, cela consiste à procéder au changement d'indice $p = n+m-k$ dans la somme S :

$$S = \sum_{k=m}^{n} k = \sum_{p=m}^{n} (n+m-p) = \sum_{p=m}^{n} (n+m) - \sum_{k=m}^{n} p = (n+m)(n-m+1) - S.$$

- Pour la somme des carrés, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

  Initialisation. Évidente. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

  Alors $$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \ldots$$
  $$\ldots = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$ Soit le résultat souhaité.

- Pour la somme des cubes, on procède également par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation.** Évidente. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

  Alors $$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n + 1\right] = \ldots$$
  $$\ldots = (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$ Soit le résultat souhaité.

∎

Remarque 7 Notons le lien entre la somme des cubes et celle des entiers consécutifs :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

Théorème 8 - Sommes géométriques. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $m \leqslant n$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

Premier terme

$$\sum_{k=m}^{n} z^k = \begin{cases} z^m \times \dfrac{1 - z^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de termes}}}}{1-z} = \dfrac{z^m - z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1, \\[2ex] n-m+1 & \text{si } z = 1. \end{cases}$$

Le cas $m = 0$ est particulièrement important et doit être su sans hésitation :

$$\boxed{\forall z \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}}$$

Démonstration. Posons $S = \sum_{k=m}^{n} z^k$. Le cas $z = 1$ étant évident, supposons $z \neq 1$.

Alors

$$(z-1)S = z \sum_{k=m}^{n} z^k - \sum_{k=m}^{n} z^k = \sum_{k=m}^{n} \left(z^{k+1} - z^k\right) = z^{n+1} - z^m,$$

par télescopage, d'où

$$S = \frac{z^{n+1} - z^m}{z - 1} = z^m \times \frac{z^{n-m+1} - 1}{z - 1}.$$

■

Voici une application importante, qui sert entre autre en optique à estimer la superposition d'ondes cohérentes :

Exercice 9 - Sommes de sinusoïdes. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on cherche à calculer

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

1. En faisant apparaître des exponentielles complexes, relier $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$ à des sommes géométriques.
2. En déduire une forme explicite des ces sommes, puis les factoriser avec la technique de l'angle moitié.
3. Résoudre l'équation $S_n(\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

Corollaire 10 - Identité remarquable pour les grands. Soient a et b dans $\mathbb{C}$, ainsi que $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a-b)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\Big)$$

Notez que la mise en facteur par $(a - b)$ était prévisible puisque le membre de gauche s'annule lorsque $a = b$. Ce type de raisonnement doit devenir systématique et permet de retrouver de nombreuses identités.

2 Sommes doubles

Fréquemment, l'ensemble I indexant une somme est un ensemble de couples. Par exemple, si $I = [\![0\,;m]\!] \times [\![1\,;n]\!] = \{(i,j)\}_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, la somme $\sum_{k\in I} z_k$ sera plutôt notée $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} z_{i,j}$.

D'apparence peut-être plus compliquée, cette somme n'est jamais que celle des termes du tableau à double entrées ci-contre.

$i \backslash j$	1	2	$\dots$	n
0	$z_{0,1}$	$z_{0,2}$	$\dots$	$z_{0,n}$
1	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$\dots$	$z_{1,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$z_{m,1}$	$z_{m,2}$	$\dots$	$z_{m,n}$

Que se passe-t-il par exemple quand on multiplie deux sommes $\sum_{i=1}^{m} a_i$ et $\sum_{j=1}^{n} b_j$? On obtient en développant une somme de mn termes pouvant être écrite à l'aide d'un seul $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = (a_1 + \ldots + a_m)(b_1 + \ldots + b_n) = a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_mb_{n-1} + a_mb_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_ib_j.$$

Théorème 11 - Produit de deux $\sum$. Pour tous $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_ib_j$.

Sommes doubles. La somme des termes d'un tableau à deux entrées peut être calculée en sommant par paquets d'abord sur les lignes ou d'abord sur les colonnes.

Somme des termes d'un tableau carré : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} z_{i,j}$ aussi notée $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{i,j}$.

$i \backslash j$	1	2	…	n	
1	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	…	$z_{1,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{1,j}$
2	$z_{2,1}$	$z_{2,2}$	…	$z_{2,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{2,j}$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n	$z_{n,1}$	$z_{n,2}$	…	$z_{n,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i,2}$	…	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i,n}$	

$$\left.\sum_{j=1}^{n} z_{1,j},\ \sum_{j=1}^{n} z_{2,j},\ \dots,\ \sum_{j=1}^{n} z_{n,j}\right\}\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{i,j} \qquad \left.\sum_{i=1}^{n} z_{i,1}\ \ \sum_{i=1}^{n} z_{i,2}\ \cdots\ \sum_{i=1}^{n} z_{i,n}\right\}\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}$$

Somme des termes d'un tableau triangulaire avec diagonale : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{i,j}$.

$i \backslash j$	1	2	…	n	
1	$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	…	$z_{1,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_{1,j}$
2		$z_{2,2}$	…	$z_{2,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=2}^{n} z_{2,j}$
⋮			⋱	⋮	⋮
n				$z_{n,n}$	$\to \displaystyle\sum_{j=n}^{n} z_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{1} z_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{2} z_{i,2}$	…	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{i,n}$	

$$\left.\sum_{j=1}^{n} z_{1,j},\ \sum_{j=2}^{n} z_{2,j},\ \dots,\ \sum_{j=n}^{n} z_{n,j}\right\}\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{i,j} \qquad \left.\sum_{i=1}^{1} z_{i,1}\ \ \sum_{i=1}^{2} z_{i,2}\ \cdots\ \sum_{i=1}^{n} z_{i,n}\right\}\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{i,j}$$

On traite de la même façon les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j}$ – tableaux triangulaires sans diagonale.

Théorème 12 - Permutation des $\sum$. Pour toute famille $(z_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}, \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{i,j}, \quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{i,j}.$$

✎ **En pratique** ✎ Pour la permutation des sommes doubles « triangulaires », il est vivement conseillé d'utiliser les expressions intermédiaires $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j}$, plutôt que de chercher à retenir les formules précédentes.

Remarque 13 Pour les calculs de sommes doubles, on peut retenir l'idée suivante :

Quand on ne sait pas quoi faire de deux sommes emboîtées « $\displaystyle\sum_i\sum_j z_{i,j}$ », on peut toujours essayer de les permuter !

Exemple 14 Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j} = n$.

Les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j}$ sont plus courantes qu'il n'y paraît, on les rencontre par exemple naturellement quand on calcule le carré d'une somme. Le calcul qui suit repose essentiellement sur l'idée que le tableau ci-contre est symétrique par rapport à sa diagonale.

$i \backslash j$	1	2	…	n
1	z_1^2	z_1z_2	…	z_1z_n
2	z_2z_1	z_2^2	…	z_2z_n
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	z_nz_1	z_nz_2	…	z_n^2

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k \times \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_iz_j = \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i<j}} z_iz_j}^{\text{Termes au-dessus de la diagonale}} + \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i=j}} z_iz_j}^{\text{Termes diagonaux}} + \overbrace{\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i>j}} z_iz_j}^{\text{Termes au-dessous de la diagonale}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_iz_j$$

Exemple 15 $(a+b)^2 = \left(a^2+b^2\right) + 2ab$ et $(a+b+c)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right) + 2\,(ab+ac+bc)$.

Théorème 16 - Carré d'un $\sum$. Pour tous $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \overbrace{2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_iz_j}^{\text{Doubles produits}}.$

3 Produits

Nous passerons sur les produits plus vite que sur les sommes - il s'agit essentiellement de la même chose !

Définition 17 - Produit. Pour toute famille $(z_i)_{i\in I}$ de nombres complexes indexée par un ensemble FINI et non vide I, le produit de tous les nombres z_i, i décrivant I, sera noté $\prod_{i\in I} z_i$.

Par convention, lorsque I est vide, $\prod_{i\in I} z_i = 1$.

Exemple 18 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous entiers m et n, avec $m \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} z = \overbrace{z\times z\times\ldots\times z}^{n-m+1 \text{ facteurs}} = z^{n-m+1}$.

Définition 19 - Factorielle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n et on note $n!$ l'entier $\displaystyle n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

Par convention $0! = 1$. **Relation de récurrence.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n\times(n-1)!$.

Exemple 20 $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ et $7! = 5040$.

Exemple 21 $\displaystyle n^n = \prod_{k=1}^{n} n = \overbrace{n\times n\times\ldots\times n}^{n \text{ facteurs}}$ à ne pas confondre avec $\displaystyle n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times 3\times\ldots\times n$.

✖ **Attention !** ✖ Contrairement au symbole $\sum$, le symbole $\prod$ n'est pas linéaire. L'analogue du théorème 3 est donné par le résultat suivant.

Théorème 22 - Règles de calculs pour $\prod$. Soit $x_m,\ldots,x_n$ et $y_m,\ldots,y_n$ des complexes, avec $m\leqslant n$, et α un complexe. On a

$$\prod_{k=m}^{n}(x_k y_k) = \prod_{k=m}^{n} x_k \times \prod_{k=m}^{n} y_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} \alpha x_k = \alpha^{\overbrace{n-m+1}^{\text{Nombre de facteurs}}} \prod_{k=m}^{n} x_k.$$

Théorème 23 - Simplification télescopique. Pour tous $z_m,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$, avec $m\leqslant n$, $\displaystyle\prod_{i=m}^{n}\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{z_{n+1}}{z_m}$.

Théorème 24 - Permutation des $\prod$. Pour toute famille $(z_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} z_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} z_{i,j}, \quad \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} z_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} z_{i,j}, \quad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} z_{i,j} = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} z_{i,j}.$$

Exemple 25 $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(ij^2) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2\right) = \prod_{i=1}^{n}(i^n n!^2) = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n \times (n!^2)^n = n!^n\times n!^{2n} = n!^{3n}$.

Exemple 26 - Des fonctions qui échangent sommes et produits. On sait que les fonctions réelles exponentielle et logarithme interchangent les sommes et produits :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Pour une famille $(x_i)_{i\in I}$ finie de réels, étendre ces propriétés en transformant $\exp\left(\sum_{i\in I} x_i\right)$ et $\ln\left(\prod_{i\in I} x_i\right)$ (dans le deuxième cas, les réels sont supposés strictement positifs). Trouver une forme simplifiée pour $\sum_{k=1}^n \ln(k)$.

4 Coefficients binomiaux

4.1 Définition et propriétés

En Première, on vous a donné une définition des coefficients binomiaux dans un contexte probabiliste, en lien avec le comptage de chemins dans certains arbres. On adopte ici une présentation différente et a priori plus féconde.

Définition 27 - Coefficients binomiaux. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle *(coefficient binomial) k parmi n*, noté $\binom{n}{k}$, le nombre

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, après simplification des factorielles, on a aussi : $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 28 - Propriétés des coefficients binomiaux.

(i) Symétrie. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) Formule de Pascal*. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$: $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

(iii) Intégralité. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	1			
4	1	4	$\boxed{6}$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Triangle de Pascal

Symétrie

Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration.

(i) Si $k < 0$, alors $n - k > n$ et $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = 0$. La raisonnement est analogue si $k > n$.

Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $0 \leqslant n-k \leqslant n$ et $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

*. Blaise Pascal (1623 à Clermont – 1662 à Paris) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe et théologien français.

(ii) Si $1 \leqslant k \leqslant n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(iii) Si $k < 0$ ou si $k > n+1$, tous les coefficients en jeu sont nuls et l'égalité est donc vérifiée.

Si $k = 0$ ou si $k = n+1$, alors $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k}$.

Enfin, si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors
$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} \overset{(ii)}{=} \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$
$$= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

(iv) Démontrons par récurrence la propriété « $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ », pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$ donc $\displaystyle\binom{0}{k} \in \mathbb{N}$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\displaystyle\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, par hypothèse de récurrence, donc $\displaystyle\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$ par somme, d'après la formule de Pascal.

■

4.2 Formule du binôme

Théorème 29 - Formule du binôme. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exemple 30 Concernant les coefficients, on reconnaîtra les premières lignes du triangle de Pascal.

Pour $n = 2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Pour $n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Pour $n = 4$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Pour $n = 5$: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{C}$, raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** $\displaystyle(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = a\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^l b^{n-l} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^{l+1}b^{n-l} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = \underbrace{a^{n+1}}_{l=n} + \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{l}a^{l+1}b^{n-l} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{k=0}$$
$$= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}}_{\text{Changement d'indice } l=k-1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{\text{Formule de Pascal}}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k}.$$

■

Application 31 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

En effet, il suffit d'appliquer la formule du binôme avec $(a, b) = (1, 1)$ et $(a, b) = (-1, 1)$ respectivement.

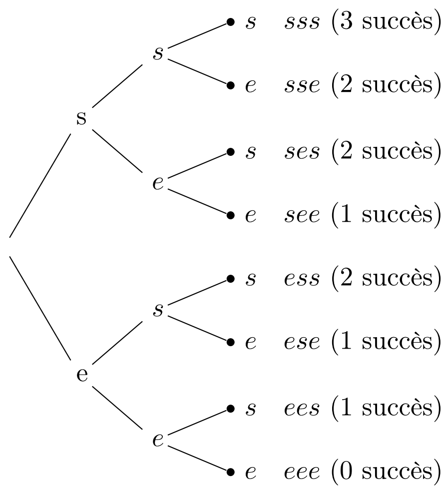
Exemple 32

1. En dérivant la fonction $f(x) = (x+1)^n$, montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k = nx(x+1)^{n-1}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Lien avec le dénombrement de chemins dans des arbres. La formule du binôme permet de relier la définition que nous venons de donner du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec celle que l'on vous a proposée en Première. Établissons ce lien sur un exemple, en considérant la répétition trois fois ($n = 3$) de manière indépendante d'une même expérience aléatoire à deux issues succès (s) et échec (e).

En Première, pour tout $k \in [\![0\,;3]\!]$, on vous a défini $\binom{3}{k}$ comme le nombre de chemins comptabilisant exactement k succès dans l'arbre ci-contre. Il en découle que $\binom{3}{0} = 1$ (chemin eee), $\binom{3}{1} = 3$ (chemins ees, ese et ees), $\binom{3}{2} = 3$ (chemins ess, ses et sse), $\binom{3}{3} = 1$ (chemin sss).

Le lien avec la définition $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ apparaît alors en développant $(s+e)^3$:



$$(s+e)^3 = (s+e)(s+e)(s+e) = (s+e)(ss+se+es+ee) = \underbrace{sss+sse+ses+see+ess+ese+ees+eee}_{\text{Les 8 chemins de l'arbre ci-dessus!}}$$
$$= \underbrace{sss}_{3\text{ succès}} + \underbrace{sse+ses+ess}_{2\text{ succès}} + \underbrace{see+ese+ees}_{1\text{ succès}} + \underbrace{eee.}_{0\text{ succès}}$$

Or la formule du binôme indique : $(s+e)^3 = \binom{3}{3}s^3 + \binom{3}{2}s^2e + \binom{3}{1}se^2 + \binom{3}{0}e^3$. Les deux points de vue « nombre de chemins avec exactement k succès » et « $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ » définissent bien le même entier $\binom{n}{k}$, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$ (nous reviendrons plus précisément sur ce point au chapitre « Dénombrement »).

4.3 Application à la linéarisation de polynôme trigonométrique

On se souvient des formules

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \text{et} \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

qui montrent comment sont reliées des expressions polynomiales en $\sin x$ et $\cos x$ avec une combinaison linéaire de $\sin x$, $\sin(2x)$, $\cos x$ et $\cos(2x)$. (Dé)linéariser consiste à trouver des formules similaires pour des puissances plus élevées.

✎ **En pratique** ✎ **(Linéarisation d'expressions trigonométriques)** Pour linéariser une expression polynomiale en $\sin x$ et $\cos x$, les deux ingrédients essentiels sont les formules d'Euler et celle du binôme. La linéarisation permet notamment le calcul des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemple 33 Linéariser $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$, ainsi que $\cos^3(x)$ et $\sin^3(x)$. Calculer $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 34 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\sin^5 x = \dfrac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x\right)$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &\overset{\text{Euler}}{=} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&\overset{\text{Binôme}}{=} \frac{1}{32i}\left(\mathrm{e}^{5ix} - 5\,\mathrm{e}^{3ix} + 10\,\mathrm{e}^{ix} - 10\,\mathrm{e}^{-ix} + 5\,\mathrm{e}^{-3ix} - \mathrm{e}^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{16 \times 2i}\left(\left(\mathrm{e}^{5ix} - \mathrm{e}^{-5ix}\right) - 5\left(\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}\right) + 10\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)\right) \\
&\overset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x\right).
\end{aligned}$$

✎ **En pratique** ✎ **(Dé-linéarisation d'expressions trigonométriques)** Cela est moins courant, mais l'on peut aussi « dé-linéariser » les expressions trigonométrique, *i.e.* effectuer la transformation inverse de la linéarisation. Les deux ingrédients essentiels sont la formule de Moivre et celle du binôme.

Exemple 35 Délinéariser $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$.