Chapitre 4 - Les nombres complexes II : Résolution d'équation

Dans ce chapitre, on montre comment les nombres complexes permettent de résoudre des équations polynomiales de degré 2, y compris à coefficients complexes. On détermine aussi les solutions de léquations $X^n = 1$, appelées racines n-ième de l'unité, en exhibat un lien fort avec la géométrie dans le plan complexe.

Nos objectif sont surtout d'acquérir des méthodes de calculs efficaces afin de :

- Résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$, y compris lorsque le discrminant est négatif. Maîtriser la forme canonique d'un trinôme
- Résoudre l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ pour un nombre complexe z donné. En déduire les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ lorsque les coefficients sont complexes.
- Ne jamais écrire $\sqrt{z}$ si z n'est pas dans $[0, +\infty[$. Ne pas foncer sur le discriminant si on peut l'éviter.
- Résoudre l'équations $X^n = 1$ et représenter les solutions dans le plan complexe.

1 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré

1.1 Avec des coefficients réels

Théorème 1 - Résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$. Soit a, b, c trois réels avec a non nul.

- On appelle *discriminant* du trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le signe de ce dernier dicte le nombre et la nature des solutions de l'équation

$$(E) : aX^2 + bX + c = 0.$$

Précisément :

⋆ si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

⋆ si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;

⋆ si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées $x_\pm = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration. ... ■

✎ **En pratique** ✎ On retiendra de la démontrsation la forme dite canonique

$$aX^2 + bX + c = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

qui permet d'étudier très facilement le trinôme (extremum, racines, etc...).

Exemple 2 Déterminer les deux solutions de l'équation $X^2 + X + 1 = 0$.

Théorème 3 - Système somme-produit. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Les solutions du système *somme-produit* $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$, sont les deux solutions (éventuellement égales) de l'équation $X^2 - aX + b = 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(X-x)(X-y) = X^2 - (x+y)X + xy$. ■

Exemple 4 Les solutions du système $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=1 \end{cases}$, d'inconnues $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, sont les couples

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

En effet, les solutions du système en jeu sont liées aux racines du trinôme $X^2-(-1)X+1 = X^2+X+1$, calculées à l'exemple précédent.

✎ **En pratique** ✎ Plus généralement, si $x_\pm$ sont les deux racines (complexes) d'un trinôme aX^2+bX+c, avec $a \neq 0$, alors

$$aX^2+bX+c = a(X-x_+)(X-x_-) = aX^2 - a(x_+ + x_-)X + ax_+x_-.$$

Ainsi la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$, ce qui offre une méthode rapide de vérification des calculs de racines.

1.2 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes

Lemme 5 - RacineS carrées d'un nombre complexe non nul. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $\omega^2 = z$, d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$, possède exactement DEUX solutions opposées, appelées les *racines carrées de z*.

Démonstration. Dans l'énoncé z est choisi non nul puisque l'équation $\omega^2 = 0$, d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ ne possède évidemment qu'une solution, à savoir 0.

Écrivons z sous forme algébrique $z = x+iy$ et donnons-nous $\omega = a+ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique. Le ressort de la preuve est donnée par l'équivalence, a priori idiote, $\omega^2 = z \iff \omega^2 = z$ et $|\omega|^2 = |z|$.

$$\begin{aligned} \omega^2 = z \quad &\iff \quad \omega^2 = z \text{ et } |\omega|^2 = |z| \quad \iff \quad \begin{cases} a^2-b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \text{ et } a^2+b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ &\iff \quad a^2 = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \quad b^2 = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = y. \end{aligned}$$

On tire alors aisément a et b AU SIGNE PRÈS de ces relations sur a^2 et b^2 et l'égalité $2ab = y$ permet quant à elle de savoir si a et b sont de même signe ou de signes opposés. On obtient finalement deux racines carrées $\omega = a+ib$ distinctes de z, opposées l'une de l'autre. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ La notation $\sqrt{z}$ est rigoureusement INTERDITE pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.
Cette interdiction provient de notre incapacité à choisir ! En effet, tout nombre complexe non nul a DEUX racines carrées distinctes qui se valent l'une l'autre. Il n'y a que dans le cas réels positifs où l'on sait choisir, puisque les deux racines carrées d'un réel positif x sont alors toutes les deux réelles, l'une positive, l'autre négative, et on choisit de noter $\sqrt{x}$ la première.

✎ **En pratique** ✎ La démonstration du théorème précédent est constructive et permet en pratique d'obtenir les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul.

Exemple 6 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$9, \quad -9, \quad -98, \quad 24+10i.$$

Notons qu'on peut aussi exploiter la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ d'un complexe z, avec $\theta \in]-\pi,\pi[$, pour trouver ses racines sous formes elles-aussi trigonométriques : $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exemple 7 Déterminer les racines carrées de $1+i$ en passant par sa forme trigonométrique.

Exemple 8 Etant donné $z \in \mathbb{C}$, représenter dans le plan complexe les racines carrées de z en distinguant les cas $|z|<1$, $|z|=1$ et $|z|>1$.

Nous sommes à présent capables de résoudre TOUTES les équations du second degré à COEFFICIENTS COMPLEXES.

Théorème 9 - Équation du second degré à coefficients complexes. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant b^2-4ac.

Remarque 10

- Ce résultat généralise celui du théorème 1, au cas où le discriminant b^2-4ac est un complexe quelconque. Sa démonstration est identique, *mutatis mutandis*, à celle du cas $\Delta>0$.
- Le théorème 3 reste évidemment valable lorsque a et b sont complexes.

Exemple 11 Les solutions de l'équation $z^2-(3+i)z+2+i=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont 1 et $2+i$.

✖ ATTENTION ! ✖ Ne pas se précipiter sur le calcul du discriminant, par exemple si l'équation ne le nécessite pas :

$$z^2-24=0, \quad z^2-z=0,$$

ou bien si on peut éviter les calculs en identifiant la somme et le produit des racines :

$$z^2-(2+i)z+(1+i)=0.$$

On prendra par ailleurs soin de vérifier ses résultats en retrouvant la somme et le produit des racines dans les coefficients, ce qui ne coûte pas grand chose.

2 Racines n^{es}

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racines n^{e} est la réciproque de la fonction puissance n^{e} sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \qquad y=\sqrt[n]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x=y^n.}$$

Voyons maintenant que la situation diffère sur $\mathbb{C}$.

Définition 12 - Racines n^{es} . Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *racine n^e de z* tout nombre complexe ζ tel que $\zeta^n=z$.
- Les racines n^{es} de 1 sont dites *racines n^{es} de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Autrement dit, pour un $z \in \mathbb{C}$ donné, les racines n^{e} de z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équations $X^n-z=0$.

✖ ATTENTION ! ✖ Il est formellement interdit d'écrire $\sqrt[n]{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, dans la mesure où il n'y a pas unicité des racines n^{es} d'un nombre complexe non nul, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 13 - Expression des racines n^{es} . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La seule racine n^{e} de 0 est 0.
- Soit $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$ NON NUL sous forme trigonométrique. Alors z possède exactement n racines n^{es} , à savoir les nombres complexes $\sqrt[n]{r}\exp\left(\dfrac{i\theta}{n}+\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$, k décrivant $[\![0\,;n-1]\!]$.
- **Cas particulier des racines n^{es} de l'unité.** $\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right\}_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

Démonstration. Le cas de 0 est clair. Pour le reste, commençons par traiter le cas des racines de l'unité, le cas général s'en déduisant.

- **Racine n^{es} de l'unité.** Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Posons $\rho = |\omega|$ et notons φ l'unique argument de ω dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$. Par identification des formes trigonométriques,

$$\begin{aligned}
& \omega^n = 1 \\
\iff\quad & \rho^n \,\mathrm{e}^{in\varphi} = 1\,\mathrm{e}^{i0} \\
\iff\quad & \rho^n = 1 \quad\text{et}\quad n\varphi \equiv 0\,[2\pi] \\
\underset{\rho\in\mathbb{R}_+}{\iff}\quad & \rho = 1 \quad\text{et}\quad \exists k \in \mathbb{Z},\quad n\varphi = 2k\pi \\
\iff\quad & \rho = 1 \quad\text{et}\quad \exists k \in \mathbb{Z},\quad \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
\underset{\varphi\in[0;2\pi[}{\iff}\quad & \rho = 1 \quad\text{et}\quad \exists k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\quad \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
\iff\quad & \exists k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\quad \omega = \mathrm{e}^{2ik\pi/n},
\end{aligned}$$

  ce qui donne bien n racines n^{es} de l'unité.

- **Cas général.** Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$ non nul sous forme trigonométrique. Posons $\zeta = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/n}$. Il est immédiat que $\zeta^n = z$ et ζ est non nul, puisque z l'est. On va déduire de cette racine n^{e} initiale de z les autres : pour tout $\omega \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& \omega^n = z \\
\iff\quad & \omega^n = \zeta^n \\
\underset{\zeta\neq 0}{\iff}\quad & \left(\frac{\omega}{\zeta}\right)^n = 1 \\
\iff\quad & \exists k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\quad \frac{\omega}{\zeta} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} \\
\iff\quad & \exists k \in [\![0\,;n-1]\!]\,,\quad \omega = \sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 14 Comme l'indique la démonstration précédente, les n racines n^{es} d'un nombre complexe non nul s'obtiennent à partir d'une de ses racines n^{e} et des n racines n^{es} de l'unité.

Exemple 15 Les racines cubiques de $1+i$ sont $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{3i\pi/4}$ et $\sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{-7i\pi/12}$.

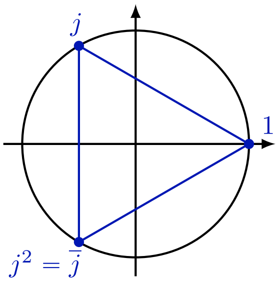
Définition-théorème 16 - Nombre j. On note j le nombre $\mathrm{e}^{2i\pi/3}$ – racine 3^{e} de l'unité – qui possède les propriétés suivantes :

$$j^3 = 1,\qquad \overline{j} = j^2,\qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad\text{et}\qquad \forall z \in \mathbb{C},\quad z^2 + z + 1 = (z-j)(z-\overline{j}).$$

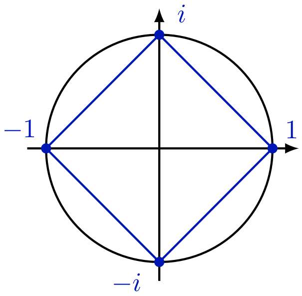
Démonstration. Le vérifier. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ Il peut arriver en physique que la lettre j serve à désigner... le nombre complexe i ! C'est souvent le cas en électricité, voyez-vous pourquoi ?

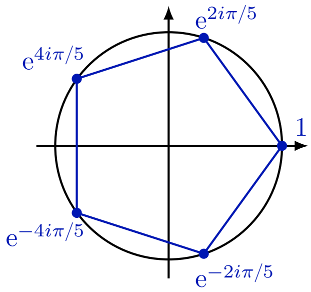
Géométriquement, on peut observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n^{es} de l'unité est l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés, de centre O et passant par le point d'affixe 1.



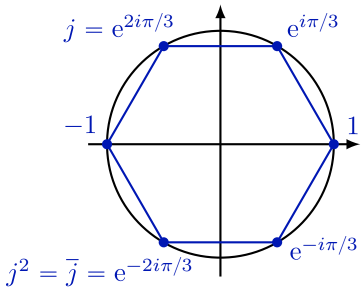
$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré.



$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.