Chapitre 5 - Fonctions à valeurs réelles ou complexes : première approche

1 Rappels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.1 Ordres et inégalités sur $\mathbb{R}$

Définition 1 - Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres réels est muni d'une *relation d'ordre* $\leqslant$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- Réfléxivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$.
- Antisymétrie : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies x = y$.
- Transitivité : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies x \leqslant z$.

Remarque 2 - Instant culturel sur les relations d'ordre.

- Ces trois propriétés correspondent à la définition d'une relation d'ordre. L'inclusion entre deux ensembles et la divisibilité sur $\mathbb{N}$ sont d'autres exemples de relations d'ordre.
- Ici la relation d'ordre est totale : deux éléments de $\mathbb{R}$ peuvent toujours être comparés. Les deux autres exemples ci-dessus sont sont des relations d'ordre "partielles".
- Aurait-on pu avoir une relation d'ordre en considérant $<$ à la place de $\leqslant$?

✖ **Attention !** ✖ Nous allons souvent jongler entre réels et complexes. Ecrire une inégalité entre des complexes qui ne sont pas réels est TOTALEMENT INTERDIT.

Proposition 3 - Compatibilité avec les opérations. Soient x, y, z et t quatre réels.

1. $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$.
2. $(x \leqslant y \text{ et } z \leqslant t) \implies x + z \leqslant y + t$.
3. $(x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z) \implies xz \leqslant yz$.
4. $(x \leqslant y \text{ et } z \leqslant 0) \implies yz \leqslant xz$.
5. $x \leqslant y \iff -y \leqslant -x$.
6. $(0 \leqslant x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant t) \implies 0 \leqslant xz \leqslant yt$.

Définition 4 - Majorant et minorant. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. - Un réel a est un majorant de X si $\forall x \in X, x \leqslant a$.
   - Un réel a est un minorant de X si $\forall x \in X, a \leqslant x$.
2. - On dit que X est majoré si X admet un majorant.
   - On dit que X est minoré si X admet un minorant.
   - On dit que X est borné si il est à la fois minoré et majoré.

Exemple 5 - Trouver des bornes.
Dire si les ensembles suivants sont minorés, majorés, bornés. Donner un majorant et un minorant, lorsque cela est possible.

1. $]-7, 10^{100}]$. **2.** $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. **3.** $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. $\{2\}$.

Lorsqu'une partie non vide admet un majorant (ou un minorant), est-il unique ?

Définition 6 - Maximum et minimum. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que a est un maximum (respectivement, minimum) de X lorsque a est un majorant (respectivement, minorant) de X et que $a \in X$. Lorsqu'un tel élément existe, il est unique, et on peut parler **du** maximum (respectivement, minimum) de X.

Exemple 7 - Trouver des extrema.
Reprendre l'exemple 5 et donner, lorsqu'ils existent, un minimum et un maximum de chaque ensemble.

1.2 Valeur absolue

Définition 8 - Valeur absolue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x, notée $|x|$, le réel positif défini par $|x| = \max(x, -x)$.

Proposition 9 - Que faire d'une valeur absolue ?. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Notez que si $x \in \mathbb{R}$ est vu comme un élément de $\mathbb{C}$, valeur absolue et module coïncident, ouf ! Evitez tout de même de parler de la valeur absolue d'un complexe, cela fait mauvais genre.

✎ **En pratique** ✎ On s'empressera d'enlever la valeur absolue par une étude de signe, si cela est possible (ce qui n'est pas toujours le cas). Si on ne connait pas le signe de x, l'encadrement ci-dessus prend tout son intérêt.

✖ **Attention !** ✖ Comme pour une inégalité entre des complexes, écrire qu'une valeur absolue est strictement négative va passablement énerver votre correcteur.

Définition 10 - Distance sur $\mathbb{R}$. Soient x et y deux réels, on appelle distance de x à y le réel positif $|x - y|$.

En particulier, si $r \geqslant 0$, alors on a

$$|x - a| \leqslant r \iff a - r \leqslant x \leqslant a + r.$$

L'interprétation graphique de cette inégalité est importante.

Exemple 11 - Distance et intervalle. Traduire par un intervalle l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, |x - 5| \leqslant 2\}$, et le représenter graphiquement.

Exercice 12 - Trouver le milieu. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leqslant \frac{b-a}{2}.$$

Interpréter géométriquement.

Proposition 13 - Regles de calculs. Soient x et y deux réels.

1. $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$, on a $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. Première inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
5. Deuxième inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Exercice 14 - Inéquation.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $| - x - 3| \leqslant 1$. **2.** $|2x - 8| > 3$.

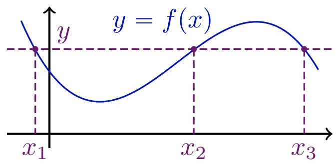
2 Vocabulaire usuel sur les fonctions

2.1 Fonctions numériques

Définition 15 - Ensemble de définition, image et antécédent.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- L'ensemble A est appelé l'*ensemble de définition de* f.
- Tout réel $f(x)$, avec $x \in A$, est appelé une *valeur de* f.
- Pour tous $x \in A$ et $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x)$, on dit que y est l'*image de* x *par* f et que x est UN *antécédent de* y *par* f.
- Le graphe (ou représentation graphique) de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\{(x, f(x)), x \in A\}$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f, c'est pourquoi on parle d'UN antécédent et non de L'antécédent de y.



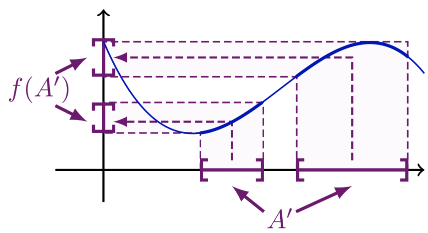
Définition 16 - Image d'une partie par une fonction, image d'une fonction.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour toute partie A' de A, on appelle *image (directe) de* A' *par* f, notée $f(A')$, la partie définie par

$$f(A') = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists x \in A', \quad y = f(x)\right\} = \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A'\right\}.$$

- L'image de A tout entier est simplement appelée *image de* f et généralement notée $\operatorname{Im} f$.

✎ **En pratique** ✎ L'image $f(A')$ de A' par f est l'ensemble des images par f des éléments de A'. Graphiquement, pour déterminer $f(A')$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A'.



Exemple 17

- L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction carrée est $\mathbb{R}_+$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sin est $\{0\}$, l'image de $[0\,;\pi]$ est $[0\,;1]$, l'image de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est $[-1\,;1]$ et l'image de $[0\,;2\pi]$ est aussi $[-1\,;1]$.

Définition 18 - Fonction « à valeurs dans... ». Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *à valeurs dans* B lorsque toute valeur de f est élément de B, *i.e.*

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B \quad \text{ou, autrement dit,} \quad \operatorname{Im} f \subset B.$$

✖ **Attention !** ✖ Dire que f est à valeurs dans B ne signifie en aucune façon que l'image de f est B. Par exemple, la fonction exponentielle est à valeurs réelles, mais seuls les réels strictement positifs sont atteints.

2.2 Opérations sur les fonctions

Définition 19 - Somme, produit, quotient. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et λ un réel.

- **Somme.** $f+g$ désigne la fonction définie sur A par
$$\forall x \in A, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
- **Multiplication par un réel.** λf désigne la fonction définie sur A par
$$\forall x \in A, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
- **Produit.** fg désigne la fonction définie sur A par
$$\forall x \in A, \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$
- **Quotient.** Lorsque g ne s'annule pas sur A, $\dfrac{f}{g}$ désigne la fonction définie sur A par
$$\forall x \in A, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Définition 20 - Composée. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que f est à valeurs dans B. On appelle *composée de f suivie de g*, notée $g \circ f$, la fonction définie sur A par

$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

La condition « f est à valeurs dans B » est évidemment primordiale, puisque pour pouvoir considérer l'expression $g(f(x))$, pour tout $x \in A$, il est nécessaire que $f(x)$ appartienne à l'ensemble de définition B de g, pour tout $x \in A$.

On peut schématiser l'opération de composition via le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple 21 La fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1\,;1]$.

✖ **Attention !** ✖ En général, la composition de deux fonctions n'est possible que dans un seul sens et, lorsqu'elle peut avoir lieu dans les deux sens, il n'y a aucune raison d'avoir $g \circ f = f \circ g$ – autrement dit l'opération de composition $\circ$ n'est pas commutative. Par exemple, pour $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^2 + 1$ définies sur $\mathbb{R}$, on a $g \circ f : x \longmapsto \left(x^2\right)^2 + 1 = x^4 + 1$ et $f \circ g : x \longmapsto \left(x^2+1\right)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

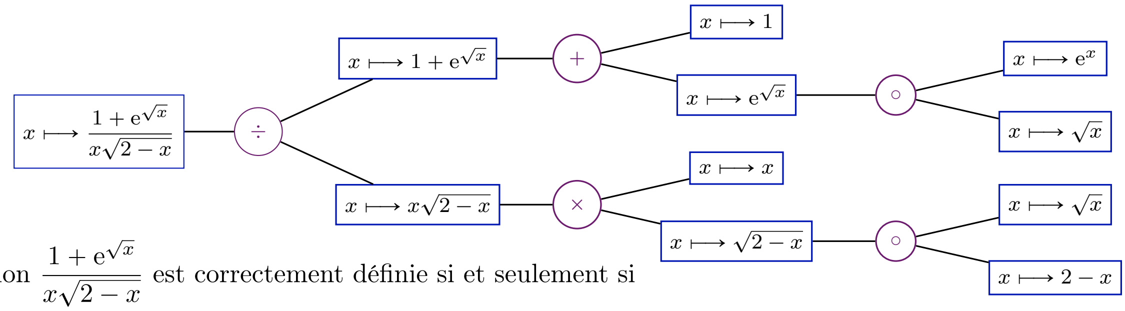
Théorème 22 - Associativité de la composition. Soit A, B et C trois parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, telles que f est à valeurs dans B et g à valeurs dans C. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Cette propriété d'associativité de l'opération de composition permet d'écrire sans ambiguïté $h \circ g \circ f$.

Exemple 23 La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est définie sur $]0\,;2[$.

En effet, la construction par opérations de cette fonction est détaillée par l'arbre ci-dessous.

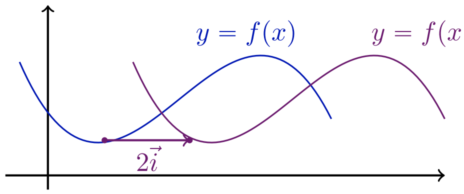


L'expression $\dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{2-x}}$ est correctement définie si et seulement si

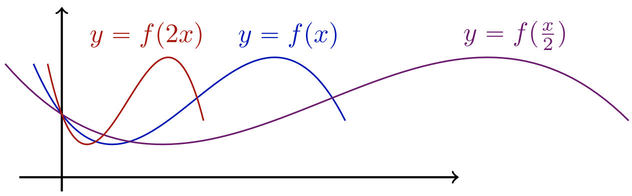
$$
\begin{aligned}
& x \geqslant 0, \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R}, \quad 2-x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x\sqrt{2-x} \neq 0 \\
\iff \quad & x \geqslant 0, \quad ,x \leqslant 2, \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 2 \\
\iff \quad & x \in \,]0\,;2[\,.
\end{aligned}
$$

Théorème 24 - Fonction translatée et dilatée. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors on a les propriétés suivantes :

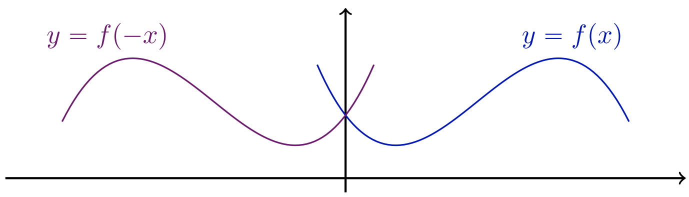
- (Fonction translatée). Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ est la translation de celui de f par le vecteur $a\vec{i}$. On parle de fonction translatée.



- (Fonction dilatée et contractée). Soit $\omega \in]0,1[$ (respectivement, $\omega \in]1,+\infty[$).
Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est la dilatation (respectivement, contraction) horizontale de facteur ω de celui de f.



- (Fonction symétrisée). Le graphe de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de celui de f.



3 Propriétés éventuelles d'une fonction

Pour chacune des notions introduites ci-dessous, il est essentiel d'en maitriser les diverses interprétations graphiques.

3.1 Parité d'une fonction

Définition 25 - Fonction paire, fonction impaire. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *paire* lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est dite *impaire* lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

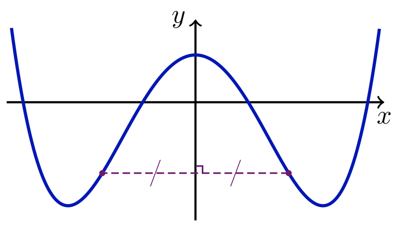
Remarque 26 Ces définitions gardent un sens pour une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in A, \quad -x \in A,$$

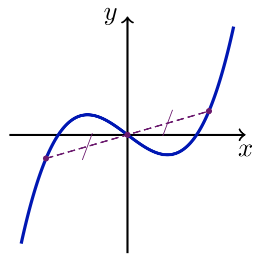
c'est-à-dire qui est symétrique par rapport à l'origine. Par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est paire.

Théorème 27 - Interprétation graphique.

- La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine des axes de coordonnées comme centre de symétrie.
- La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

Pour le second point (et comme dans d'autres endroits), il est implicite que l'on représente la courbe dans un repère orthonormal, ce qui est (presque) toujours le cas pour une étude de fonction.

Exemple 28 La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire et la fonction inverse $x \longmapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire.

Remarques 29

- Du fait de ces propriétés de symétrie, le domaine d'étude d'une fonction paire ou impaire peut être réduit, en l'occurrence à $\mathbb{R}_+$ (ou à $A \cap \mathbb{R}_+$ pour une fonction définie sur A).
- Lorsque 0 est un élément de l'ensemble de définition d'une fonction impaire, on a $f(0) = 0$.

3.2 Fonctions périodiques

Définition 30 - Fonction périodique. Soit T un réel NON NUL. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est dite *T-périodique* ou *périodique de période T* lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

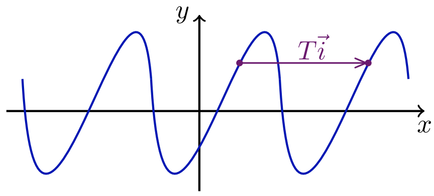
Le cas échéant, le réel T est appelé UNE *période de f*.

✖ ATTENTION ! ✖ Une fonction périodique ne possède jamais une seule période. En effet, tout multiple entier d'une période T est encore une période ! En particulier, $-T$ est aussi une période ! On peut cependant parler de LA plus petite période positive, souvent abréger en “la période”. Notez que son existence n'est pas triviale !

Exemples 31

- Les fonctions constantes sont périodiques.
- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.

Théorème 32 - Interprétation graphique. La courbe représentative d'une fonction périodique de période T est globalement invariante par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.



✎ **En pratique** ✎ À l'instar des fonctions paires ou impaires, le domaine d'étude d'une fonction T-périodique peut être réduit ; en l'occurrence à un sous-ensemble de longueur T de $\mathbb{R}$, par exemple $[0\,;T[$.

Théorème 33 - Opérations sur les fonctions périodiques. Soit T un réel non nul, et $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

(i) Les fonctions $f + g$ et fg sont T-périodiques, ainsi que $\dfrac{f}{g}$, si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \longmapsto f(\omega x)$ est $\dfrac{T}{\omega}$-périodique.

Si par exemple $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \longmapsto f(2x)$ est la contraction horizontale de facteur 2 de celui de f. Ainsi, si f est T-périodique, il n'est pas étonnant que $x \longmapsto f(2x)$ soit $\dfrac{T}{2}$-périodique.

Démonstration. ... ■

Exemple 34 La fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ est π-périodique, puisque la fonction sinus est 2π-périodique.

3.3 Fonctions monotones

Définition 35 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. f est dite *strictement croissante* sur A lorsque :
$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$
2. f est dite *strictement décroissante* sur A lorsque :
$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$
3. f est dite *croissante* sur A lorsque :
$$\forall x, y \in A, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$$
4. f est dite *décroissante* sur A lorsque :
$$\forall x, y \in A, \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y).$$

Dans les deux premiers (resp. derniers) cas, la fonction f est dite *strictement monotone* (resp. *monotone*) sur A.

Enfin, f est dite *constante* sur A lorsque : $\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y)$.

Remarque 36

- On peut évidemment CARACTÉRISER la monotonie d'une fonction DÉRIVABLE sur un INTERVALLE par le signe de sa dérivée, mais c'est là un THÉORÈME et non une DÉFINITION. La définition précédente est générale et ne requiert ni la dérivabilité de f ni que A soit un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La monotonie des fonctions est souvent le bon outil pour justifier la conservation ou l'inversion du sens d'une inégalité que l'on cherche à transformer.

Théorème 37 - Somme de fonctions monotones. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ aussi. Si de plus f ou g l'est strictement, alors $f + g$ aussi.

On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 38 Il est inutile de dériver pour justifier que la fonction $x \longmapsto x + \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$!

Théorème 39 - Composée de fonctions monotones. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est à valeurs dans B.

- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation contraires, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Démonstration. Exercice. ■

Exemple 40 Il est inutile de dériver pour justifier que la fonction $x \longmapsto e^{e^x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$!

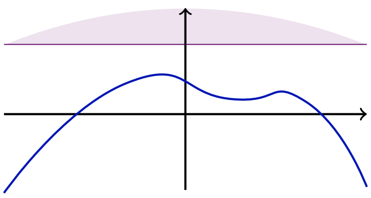
✖ **Attention !** ✖ Il est beaucoup plus délicat de parler de la monotonie d'un produit de fonctions ! Par exemple, vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto xe^x$ n'est pas monotone. Par contre, si les deux fonctions sont croissantes et positives, leur produit est bien croissante.

3.4 Fonctions bornées, extrema

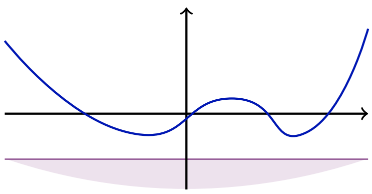
Définition 41 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *majorée sur A* lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad f(x) \leqslant M.$ Un tel réel M est appelé UN majorant de f sur A. On dit aussi que *f est majorée par M sur A* ou que *M majore f sur A*.
- La fonction f est dite *minorée sur A* lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad f(x) \geqslant m.$ Un tel réel m est appelé UN minorant de f sur A. On dit aussi que *f est minorée par m sur A* ou que *m minore f sur A*.
- La fonction f est dite *bornée sur A* lorsqu'elle est majorée et minorée sur A, *i.e.* lorsque :

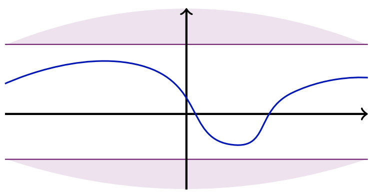
$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad |f(x)| \leqslant K.$$



Fonction majorée non minorée



Fonction minorée non majorée



Fonction bornée

Démonstration. ... ■

Théorème 42 L'ensemble des fonctions bornées sur A est stable par combinaison linéaire et par produit.

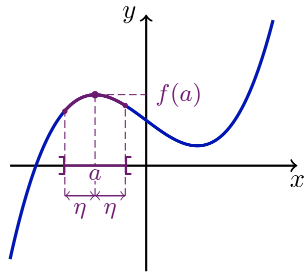
Démonstration. ... ■

Définition 43 - Extrema. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f admet un *maximum sur A en a* lorsque, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé LE maximum de f sur A, noté $\max\limits_{A} f$ ou $\max\limits_{x\in A} f(x)$.
- On dit que f admet un *maximum local en a* lorsque

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad |x-a| < \eta \implies f(x) \leqslant f(a). \tag{1}$$

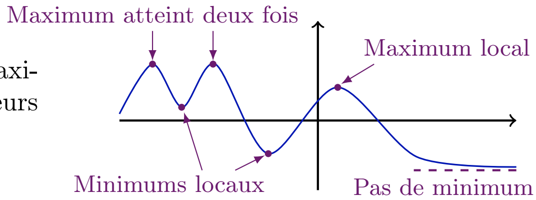
- On définit de manière analogue les notions de *minimum* et *minimum local*.
- On dit que f admet un *extremum* (resp. *extremum local*) lorsque f admet un maximum ou un minimum (resp. un maximum local ou un minimum local).



Exemple 44 Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est minoré mais n'admet pas de minimum (on pensera à une fonction qui a des limites en l'infini).

Remarque 45 L'assertion (1) équivaut à l'existence d'un intervalle ouvert centré en a, $I =]a-\eta\,; a+\eta[$, tel que, pour tout $x \in A \cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Une fonction peut ne pas avoir de maximum/minimum et quand elle en a un, celui-ci peut être atteint en plusieurs points distincts.



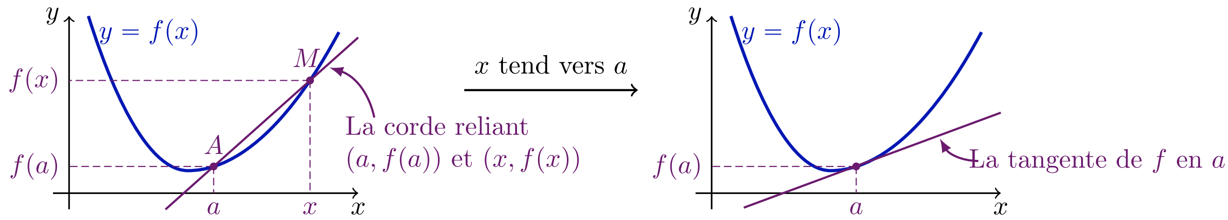
Exemple 46 La fonction cosinus admet 1 pour maximum sur $\mathbb{R}$ qui est atteint en tous les points de l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$. De même, elle possède un minimum -1 atteint en tous les points de l'ensemble $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4 Rappels concernant la dérivation

Définition 47 - Dérivabilité, tangente.
Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- La fonction f est dite *dérivable en a* lorsque $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ EXISTE ET EST FINIE. Le cas échéant, cette limite est appelé le *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur I tout entier, *i.e.* dérivables en tout point de I, est noté $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelée la *dérivée de f* et notée f'.
- Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la *tangente (à la courbe) de f en a*.

Si f est dérivable en a, alors pour $x \approx a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a)$, soit $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. Ce raisonnement sans rigueur justifie rapidement que la tangente à la courbe de f en a est la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a. D'un point de vue géométrique, sachant que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de f entre a et x est la pente de la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, la limite $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente la « pente limite » des cordes précitées.



✖ **Attention !** ✖ **La notation « $f(x)'$ » est totalement interdite !**

La notation $\frac{d}{dx}(f(x))$, issue de la physique, est, elle, valide.

Pour dériver une fonction, *e.g.* $f : x \longmapsto e^{\sin x}$, il ne faut pas écrire « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cancel{\left(e^{\sin x}\right)'} = e^{\sin x}\cos x$ », mais simplement « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{\sin x}\cos x$ ».

Théorème 48 - Opérations sur les dérivées. Soit I un intervalle et $f, g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- **Multiplication par un réel.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- **Somme.** $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
- **Produit.** fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
- **Quotient.** Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Soit I et J deux intervalles, $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{D}(J, \mathbb{R})$ tels que f est à valeurs dans J.

- **Composée.** $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$

Exemple 49 Montrer que la fonction $x \longmapsto \ln\left(x^2 - x\right)$ est définie et dérivable sur $]-\infty\,; 0[\,\cup\,]1\,; +\infty[$.

Théorème 50 - Caractérisation des fonctions dérivables constantes/monotones. Soit I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I. Si de f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

  En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

On dispose évidemment de résultat analogue pour la décroissance, *mutatis mutandis*.

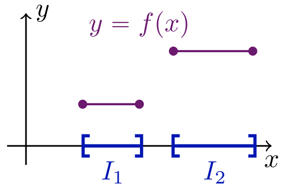
On évitera de dire que f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' > 0$: considérer par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. La condition "f' est strictement positive" est-elle nécessaire ou suffisante pour que f soit croissante ?

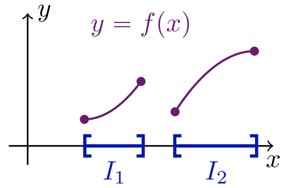
✎ **En pratique** ✎ On calcule généralement les dérivées pour leur SIGNE. Par conséquent

Factorisez toujours vos dérivées le plus possible !

✖ **Attention !** ✖ Dans le théorème précédent, l'hypothèse selon laquelle I est un INTERVALLE est cruciale. Ce théorème est faux lorsque I est une réunion d'intervalles non vides disjoints.

f est constante sur I_1 et I_2, ainsi $f' = 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.





f est croissante sur I_1 et I_2, ainsi $f' \geqslant 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

Pour prévenir d'éventuels drames, on se limitera essentiellement à parler de monotonie sur des INTERVALLES de $\mathbb{R}$.

✎ **En pratique** ✎ On a souvent besoin d'établir des inégalités en mathématiques et, s'il n'y a pas de méthode unique pour y parvenir, il y en a quand même une qu'il faut toujours avoir en tête : l'ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION. Et pour cela, un outil clef est le tableau de variations. Voici quelques exemples pour nous entrainer :

Exemple 51 - Un grand classique. Pour tout $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Exemple 52 Pour tout $x \in [0\,;2]$, $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[\dfrac{1}{7}\,;1\right]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x^2+3} \in \left[-\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

Exemple 53 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\dfrac{x+1}{x-1}\ln x \geqslant 2$.

Exemple 54 Pour tous $x, y \in \left]-1\,;1\right[$, $\dfrac{x+y}{1+xy} \in \left]-1\,;1\right[$.

Dérivation d'ordres supérieurs

Définition 55 - Dérivée n^e . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. On pose $f^{(0)} = f$, et on définit par récurrence la dérivée n^e de f, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$, lorsqu'elle existe.
2. Une fonction f est dite de classe $C^n(I, \mathbb{R})$ lorsqu'elle est n fois dérivable et que sa dérivée n^e est continue, et on note alors $f \in C^n(I, \mathbb{R})$.
3. On dit que f est de classe $C^\infty(I, \mathbb{R})$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f \in C^n(I, \mathbb{R}).$$

la fonction f est alors dite “infiniement dérivable sur I”.

La plupart des fonctions usuelles sont C^∞ sur leur intervalle de dérivabilité. Nous verrons des cas pathologiques dans le chapitre sur la dérivabilité.

Exercice 56 - Calculs de dérivée n^e . Montrer que les fonctions suivantes sont C^∞ sur leurs intervalles de définition et calculer leur dérivée n^e pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ **2.** $f(x) = \sin x$.

Calculer une dérivée n^e peut-être délicat en général, nous verrons des formules pour le cas d'un produit de fonctions.

Dérivation d'une fonction à valeurs complexes En mécanique, on dérive la position d'un point pour calculer sa vitesse, mais cela cache des définitions délicates : même si la variable « temps » est réelle, la fonction que l'on dérive est à valeurs dans le plan ou l'espace. On décrit ici comment dériver une fonction à valeurs complexes.

Définition 57 - Dérivée d'une fonctions à valeurs complexes. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On peut écrire $f = f_1 + if_2$ où $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit alors que f est dérivable sur I si f_1 et f_2 le sont, et on définit alors $f' : I \to \mathbb{C}$ par $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$.

Exemple 58 - Un point qui tourne. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{i\theta}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Interpréter en analysant le vecteur d'affixe $f'(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple 59 - Des calculs efficace. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{(\alpha+i\theta)x}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Trouver une primitive de $\cos(3x)e^x$. Comment auriez-vous fait sans passer par les complexes ?

5 Introduction aux bijections et aux réciproques

5.1 Notions de bijection et de réciproque

Les énoncés de ce paragraphe seront présentés dans un cadre plus général et démontrés au chapitre sur les ensembles.

Définition 60 - Bijection. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite *bijective de A sur B* lorsque

$$\forall y \in B, \quad \exists! x \in A, \quad y = f(x).$$

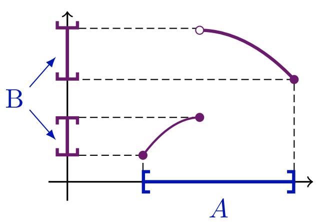
Le cas échéant, on dit aussi que f *est bijection de A SUR B* ou que f *réalise une bijection de A SUR B*.

✎ **En pratique** ✎ Formulée en termes d'équations, la définition précédente indique qu'une fonction $f : A \longrightarrow B$ est une bijection si et seulement si, pour tout élément $y \in B$ fixé, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x, admet une et une seule solution dans A.

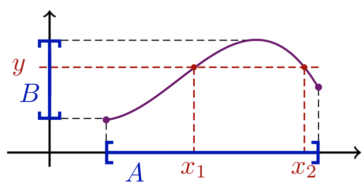
Exemple 61

- Dire dans les cas suivants si la fonction $f : A \to B$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection :

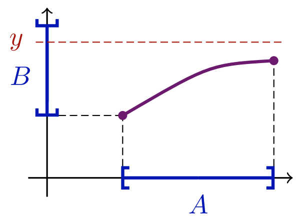
  1. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$. **2.** $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}$. **3.** $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}_+$.
  4. $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_+$. **5.** $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \mathbb{R}_+$.



Fonction bijective
de A sur B.



Fonction NON bijective
de A sur B,
y a PLUSIEURS antécédent.



Fonction NON bijective
de A sur B,
y n'a AUCUN antécédent.

✖ **ATTENTION !** ✖

- Une bijection n'est pas nécessairement monotone, comme l'indique clairement la figure de gauche ci-dessus.
- À moins qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, il faut toujours préciser « de A SUR B » quand on évoque la bijectivité d'une fonction.

Théorème 62 - Fonction réciproque. Soit f une fonction bijective. On appelle réciproque de f, notée f^{-1}, la fonction définie par

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} B & \to & A \\ y & \mapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}$$

Elle vérifie

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

On a en particulier

$$\forall x \in A, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B, \quad (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

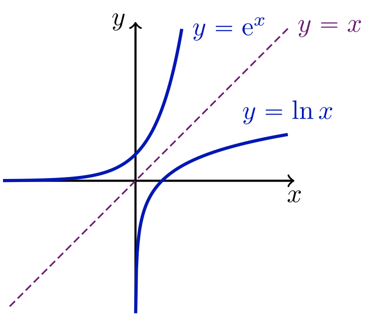
Géométriquement, cette équivalence signifie que les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (*première bissectrice*).

Exemple 63

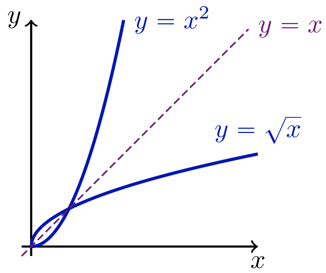
- Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre, donc elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \mathrm{e}^x = x$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$. En fait, c'est une des définitions possibles du logarithme que d'être la réciproque de l'exponentielle.
- Reprenons la fonction $x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Ce cas permet de définir la fonction racine carrée usuelle, en effet, les fonctions carrée, restreinte à $\mathbb{R}_+$, et racine carrée sont réciproques l'une de l'autre et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x}^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$.

✖ **Attention !** ✖ C'est une erreur très classique que de croire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = x$. La bonne relation est $\sqrt{x^2} = |x|$.

✎ **En pratique** ✎ Etant donnée une fonction $f : A \to B$ bijective, pour $y \in B$, afin de trouver $f^{-1}(y)$, on peut résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in A$: sa solution est la valeur $f^{-1}(y)$. Hélas, même si f a une forme simple, il peut être impossible de trouver une expression pour f^{-1}. Nous donnerons dans le chapitre sur la continuité des résultats pour montrer qu'une fonction est bijective sans résoudre explicitement cette équation.



La symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la droite d'équation $y = x$ se visualise aisément sur les figures ci-contre.



✖ **Attention !** ✖ On fait souvent la confusion, à l'oral comme en pratique, entre la réciproque et la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ à cause de la notation $^{-1}$. Ne tombez pas dans le piège ! Ces deux notions coïncident dans le cas d'un type de fonction particulière, laquelle ?

Exercice 64

- Déterminer si la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est bijective, et donner sa réciproque le cas échéant.
- Même question pour la fonction $f :]-3, +\infty[\to]2, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$. Notez que je vous ai donné l'ensemble d'arrivée qui va bien, nous aurons bientôt des moyens de trouver l'ensemble des images d'une fonction.

Le théorème suivant est admis, mais nous verrons plus tard des liens entre monotonie et bijectivité.

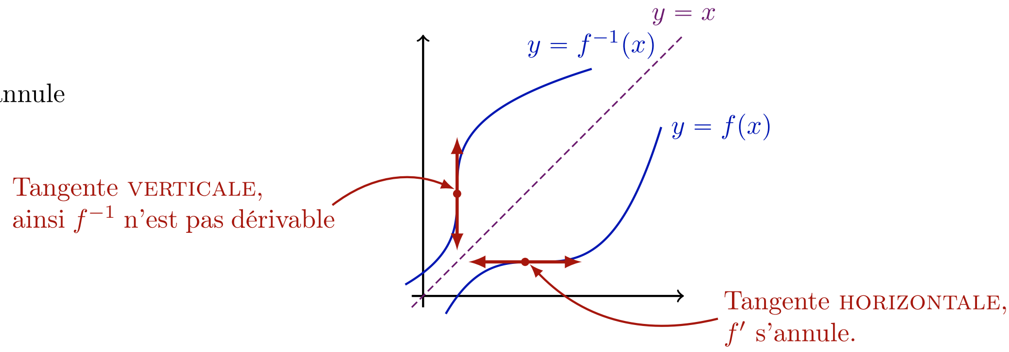
Théorème 65 - Dérivabilité d'une réciproque. Soit I et J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de I sur J. Si f est dérivable sur I ET SI f' NE S'ANNULE PAR SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

✎ **En pratique** ✎ Cette formule est facile à retrouver, il suffit de dériver la formule composée $\forall x \in I,\ (f \circ f^{-1})(x) = x$. Elle possède par ailleurs une interprétation graphique à savoir.

✖ Attention ! ✖

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Exemple 66 La fonction carrée f restreinte à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée $f' : x \longmapsto 2x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, en vertu du théorème précédent, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sqrt{\cdot}'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Retrouver de même la dérivée du logarithme, définie comme la fonction réciproque de l'exponentielle.