Chapitre 6 - Base de logique, ensembles et fonctions

Dans ce chapitre, on développe des éléments de logique et de manipulation des ensembles. Ce sont des outils importants car les preuves reposent sur des raisonnements logiques, et l'écriture des mathématiques fait intervenir systématiquement des ensembles. On conclut avec une approche un peu plus générale des fonctions.

Nos objectifs :

- Savoir écrire un ensemble avec des accolades. Manipuler les notions d'inclusion, d'intersection et de réunion. Illustrer par des diagrammes d'Euler à base de « patates ».
- Distinguer les notions de « ou » et « et » pour construire de nouvelles assertions. Nier une assertion. Maîtriser la notion d'implication et d'équivalence, et faire le lien avec des conditions nécessaires et/ou suffisantes.
- Approfondir la notion de bijection en identifiant l'injectivité et la surjectivité d'une fonction f donnée. Interpréter graphiquement et faire le lien avec les solutions d'une équation $y = f(x)$ pour y donné, d'inconnue x. Appréhender la notion de bijection réciproque.

1 Ensembles

Définition 1 - Ensemble. Un ensemble est une *collection* d'objets mathématiques distincts, appelés éléments. Si x est un élément d'un ensemble E, on dit que x appartient à E, et on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

On a caché la vraie définition dans le mot *collection*, la théorie des ensembles étant un peu plus dure d'accès, nous nous contenterons de cela.

✎ **En pratique** ✎ Il existe deux manières de définir un ensemble :

- En extension : on liste ses éléments, si c'est possible. Par exemple
$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$
L'ordre n'a pas d'importance dans cette écriture.
- En compréhension : on les définit par une propriété caractéristique de ses éléments, en général situés dans un plus gros ensemble (ce que l'on précise au début). Sur le même exemple :
$$E = \{n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant n \leqslant 10\}.$$

De nombreuses notations sont réservées aux ensembles les plus utilisés, par exemple pour les nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Leurs constructions n'est pas au programme. Il y a aussi des conventions pour les ensembles de fonctions : $C^n(I, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\dots$, qui peuvent varier d'un cours à l'autre.

Définition 2 - Inclusion. Soient F et E deux ensembles. On dit que F est une partie de E, ou encore un sous-ensemble de E, ou encore que F est inclus dans E, si tout élément de F et aussi élément de E, autrement dit si
$$\forall x \in F, \quad x \in E.$$
On note alors $F \subset E$.

✎ **En pratique** ✎ Des relations entre ensembles sont représentées par des schémas à base de “patates”, savamment appelées diagrammes d'Euler, voire de Venn dans certains cas. Nous en ferons en cours tout au long de ce chapitre.

La définition suivante est tout aussi perturbante :

Définition 3 - Ensemble vide. On appelle ensemble vide, noté $\varnothing$, l'ensemble qui ne contient aucun élément. Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$.

Ce n'est pas "le vide", c'est un ensemble qui ne contient rien.

Définition 4 - Ensembles égaux. On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$ si ils contiennent les mêmes éléments, c'est-à-dire si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Remarque 5 - Une relation d'ordre. Etant donné des ensembles E, F et G, on a clairement les trois points suivants :

- $E \subset E$.
- Si $F \subset E$ et $E \subset F$, alors $E = F$.
- Si $G \subset F$ et $F \subset E$, alors $G \subset E$.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

✖ **Attention !** ✖ Ne pas confondre $\in$ et $\subset$, qui se place à des niveaux différents. On a par exemple $2 \in \mathbb{N}$ et $\{2\} \subset \mathbb{N}$.

✎ **En pratique** ✎ La double inclusion est un moyen puissant pour montrer l'égalité entre deux ensembles.

Exercice 6 - Une paramétrisation. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 4\}$ et $F = \{(4t + 2, 2t - 1), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $E = F$.

Dans cet exercice, on notera l'ambigüité dans la définition de F : il est clair sur la définition que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. En toute rigueur, il aurait fallu écrire $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = 4t + 2 \text{ et } y = 2t - 1\}$.

Définition 7 - Ensemble des parties. Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E. Autrement dit , $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Il s'agit d'un ensemble d'ensembles. Alors à votre avis, a-t-on $E \subset \mathcal{P}(E)$ ou bien $E \in \mathcal{P}(E)$?

Exemple 8 - Exemples de petite taille. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants :

1. $E = \{1, 2\}$. **2.** $E = \{1, 2, 3\}$. $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Définition 9 - Réunion et intersection. Soient E et F deux ensembles.

- On appelle réunion (ou union) de E et F, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F :
$$x \in E \cup F \iff (x \in E \quad \text{ou} \quad x \in F).$$
- On appelle intersection de E et F, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments appartenant à E et à F :
$$x \in E \cap F \iff (x \in E \quad \text{et} \quad x \in F).$$

✖ **Attention !** ✖ Comme nous allons le voir bientôt, le "ou" entre deux assertions mathématique est inclusif, c'est-à-dire qu'il suffit que l'une des deux soit vérifiée pour que le tout fonctionne. En particulier, si $x \in E$ et $x \in F$, alors $x \in E \cup F$. En d'autres termes, $(E \cap F) \subset (E \cup F)$ (notez que les parenthèses sont en fait inutiles, hormis pour des questions de lisibilité).

Définition 10 - Différence. On appelle différence de F dans E, ou encore E privé de F, notée $E\backslash F$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F. Autrement dit :

$$x \in E\backslash F \iff (x \in E \quad \text{et } x \notin F).$$

Exemple 11 - Différence.

1. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$. Déterminer $E \cap F$, $E \cup F$, $E\backslash F$ et $F\backslash E$.
2. Comment appelle-t-on les éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$? Pourquoi cet ensemble est-il non vide ?
3. Ecrire $\mathbb{R}^*$ comme différence ensembliste.

Définition 12 - Complémentaire. Soient E et F deux ensembles tels que $F \subset E$. On appelle complémentaire de F dans E, noté $\complement_E F$, ou encore F^c, ou encore $\overline{F}$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F.

Remarque 13 - Complémentaire.

1. Il s'agit de la différence vue précédemment lorsqu'un ensemble est inclus dans un autre.
2. La notation $\complement_E F$ est plus précise, car elle précise bien "dans quel ensemble" a lieu le complémentaire. Par exemple, si vous écrivez $\mathbb{N}^c$, s'agit-il des entiers strictement négatifs (i.e. $\complement_{\mathbb{Z}}\mathbb{N}$) ou des réels qui ne sont pas des entiers (i.e. $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$), ou bien encore d'autre chose ? Ansi, les notations qui ne précisent pas le gros ensemble ne sont tolérées que lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité.

Exercice 14 - Relations sur les complémantaires. Soient F et E deux ensembles avec $F \subset E$. Prouvez les identités suivantes : $(F^c)^c = F$ et $F \cup F^c = E$.

Proposition 15 - Loi de Morgan. Soient F et G deux sous-ensembles d'un ensemble E. Alors on a (le complémentaire est pris dans E) :

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \qquad \text{et} \qquad (E \cap F)^c = E^c \cup F^c.$$

Il existe de nombreuses règles de calculs sur les ensembles. Nous en donnons quelques-unes à véririfier dans l'exercice suivant. En général, il vaut mieux avoir l'intuition d'une règle et savoir la démontrer, selon le contexte, que d'apprendre des listes de formules peu digestes. Faire des schémas peut aider !

Exercice 16 - Quelques règles de calculs ensemblistes. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble. Vérifier les points suivants, en les illustrant si possible :

- $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$ (commutativité).
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité).
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).

Voici quelques exercices eux aussi assez directs :

Exercice 17

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble tels que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.
- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Définition 18 - Produit cartésien. Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de E et de F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y), où x est un élément de E et y un élément de F. Autrement dit

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}.$$

Remarque 19 - Produit cartésien.

- On peut généraliser cela à un produit de plusieurs ensembles.
- Lorsque $E = F$, on peut noter $E \times F = E^2$.
- Le nom vient bien de Descartes, qui en introduisant des coordonnées (x, y) pour un point du plan, a identifié ce dernier à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemple 20 - Des produits cartésiens (ou pas).

- Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{c, d\}$. Déterminer $E \times F$.
- Soit $E = \{0, 1\}$, déterminer E^2.
- Soit $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec $a < b$ et $c < d$. Déterminer et représenter $I \times J$.
- Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leqslant 1\}$. Dessiner E, et montrer que E ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

2 Elements de logique

On rappelle qu'une assertion est une phrase mathématique, qui peut être soit vraie, soit fausse (principe du tiers exclu). Par exemple "2 est un nombre positif" est une assertion vraie, tandis que "5 est divisible par 3" est une assertion fausse.

Définition 21 - Nier une assertion. Etant donnée une assertion $\mathcal{P}$, sa négation est notée $\neg\mathcal{P}$, ou encore (non $\mathcal{P}$). Elle est vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ est fausse.

Remarque 22 - Nier une négation. L'assertion $\neg(\neg\mathcal{P})$ est équivalente à $\mathcal{P}$. On peut le voir en faisant la table de vérité.

Exemple 23 - Nier une assertion.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons l'assertion $\mathcal{P}(x)$:« $x \leqslant 1$ ». Ecrire la négation de $\mathcal{P}(x)$. Donner un réel x tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie, et un autre tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.
- Plus dur et plus important : Soit maintenant I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{Q}$ l'assertion "$\forall x \in I,\ x \leqslant 1$". Ecrire la négation de $\mathcal{Q}$. Donner un intervalle I tel que $\mathcal{Q}$ soit vraie, et un autre intervalle tel que $\mathcal{Q}$ soit fausse.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. La négation de « f est décroissante » est-elle « f est croissante ». Si non, écrire une négation avec des quantificateurs.

Cet exemple est crucial : on voit que lorsque l'on nie une assertion, l'emploi des quantificateurs est subtil. Etant donné un ensemble E et une assertion $\mathcal{P}(x)$ dépendant de $x \in E$, on peut retenir que la négation de « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg\mathcal{P}(x)$ ». Ce n'est pas très digeste, mais nous aurons bientôt un cadre d'application important.

Définition 24 - Connecteurs logiques « ou », « et ». Les connecteurs logiques « ou » (inclusif) et « et » ont le sens logique que l'on attend, ils sont définis par les tables suivantes :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux	Faux

Définition 25 - L'implication. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. Alors $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est une abréviation pour l'assertion « $(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$ »

Choquant n'est-ce pas ? Vérifions que l'assertion « $(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$ » traduit bien la notion d'implication : supposons que cette assertion soit vraie. Supposons que $\mathcal{P}$ soit vraie, alors $\neg\mathcal{P}$ est faux, et donc c'est que $\mathcal{Q}$ est vraie. Ouf ! Une manière plus "rassurante" est d'établir la table de la vérité de l'assertion « $(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$ » selon les valeurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$(\neg\mathcal{P})$ ou $\mathcal{Q}$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Encore une fois, c'est ce que l'on attend d'une implication. Notons que si $\mathcal{P}$ est faux, alors $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est toujours vraie, que $\mathcal{Q}$ soit vraie ou pas ! ! "Si les licornes existent, alors n'importe quoi est vrai".

Théorème 26 - La contraposition. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions. Alors $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie si et seulement si $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$ l'est.

Voici une preuve orale peu rigoureuse : supposons que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Alors, si $\mathcal{Q}$ est fausse, c'est que $\mathcal{P}$ ne peut être vrai (sinon $\mathcal{Q}$ le serait). On a bien $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$. Réciproquement, on reprend ce que l'on vient de faire en niant les négations : supposons $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$, en appliquant ce que l'on vient de dire, on a $\neg(\neg\mathcal{P}) \implies \neg(\neg\mathcal{Q})$, i.e. $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Une preuve plus rassurante et rigoureuse est la suivante :

Exercice 27 - Preuve de la contraposée. Ecrire la table de vérité de $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$, et en déduire la proposition

✎ **En pratique** ✎ Pour montrer que l'assertion $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie :

- Si $\mathcal{P}$ est toujours fausse, il n'y a rien à faire, mais c'est rarement le cas.
- Si non, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie, et on doit montrer qu'alors $\mathcal{Q}$ aussi.
- On peut montrer la contraposée lorsque $\neg\mathcal{P}$ ou $\neg\mathcal{Q}$ vous semblent plus sympathiques.

Fiez-vous à vos éléments de langages :

Exemple 28 - Inégalités strictes et larges. Si x est réel, laquelle des deux propositions « $x > 0$ » et « $x \geqslant 0$ » implique l'autre ?

Exercice 29 - Des preuves par contraposée. Montrer par contraposée les résultats suivants :

1. Soient a et b deux réels. Si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 est impair, alors n est impair.

Les implications sont très utiles dans les raisonnements d'analyse-synthèse : imaginons que l'on doive montrer que $\mathcal{P}$ est vraie (ou trouver quand est-ce qu'elle l'est). On va alors supposer qu'elle l'est, et voir ce que cela implique, autrement dit on raisonne par condition nécessaire, c'est l'analyse. Ensuite, si on a aboutit à des pistes plus précises, on fait la synthèse. Voici un exercice typique :

Exercice 30 - Une décomposition par analyse-synthèse. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On pourra raisonner par analyse-synthèse afin d'exprimer ces deux fonctions à partir de f et du symétrisé de f.

Définition 31 - Equivalence. On définit l'assertion $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ comme $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P})$. On lit « $\mathcal{P}$ est équivalent à $\mathcal{Q}$ ».

Liens entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Voici un parallèle entre ces deux mondes :

Symbole ensembliste	$\cup$	$\cap$	$\complement$	$\subset$	$=$
Symbole logique	ou	et	$\neg$	$\Longrightarrow$	$\Longleftrightarrow$

Ce tableau n'a rien de rigoureux, il indique juste que ces différentes notions ont des comportements similaires.

Exercice 32 - Loi de Morgan pour la logique. Guidés par la Proposition 15 (et par vos raionnements), compléter les équivalences :

$$\neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \iff \qquad\qquad \neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \iff$$

Ce parallèle peut être rendu rigoureux de la manière suivante : on se donne deux parties A et B d'un ensemble E. Etant donné $x \in E$, on considère les assertions $\mathcal{P}(x)$: « $x \in A$ » et $\mathcal{Q}(x)$: « $x \in B$ ». Alors les deux lignes du tableau suivant décrivent les mêmes assertions :

$x \in A \cup B$	$x \in A \cap B$	$x \in A^c$	$A \subset B$	$A = B$
$\mathcal{P}(x)$ ou $\mathcal{Q}(x)$	$\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$	$\neg\mathcal{P}(x)$	$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \Longrightarrow \mathcal{Q}(x)$	$\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x)$

C'est un parallèle fécond, mais on prendra garde aux confusions : si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux assertions, n'écrivaient pas $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ pour formuler l'assertion « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ».

✎ En pratique ✎

- Lorsque l'on a une implication $A \Longrightarrow B$, on dit que A est une condition suffisante (CS) pour B (il suffit que A soit vrai pour que B le soit), tandis que B est une condition nécessaire (CN) pour A (il faut que B soit vrai pour que A le soit). Attention, on a souvent l'un et pas l'autre !
- Une équivalence $A \iff B$ décrit qu'une assertion est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour l'autre.

Exemple 33 - Nécessaire ou suffisant ?. Compléter la colonne par "il faut" ou "il suffit", puis par le connecteur logique $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$.

Info sur la variable	Pour que A	Il faut que/ Il suffit que/les deux	B
$x \in \mathbb{R}$	$x^2 > 16$		$x > 4$
$x \in \mathbb{R}^+$	$x^2 > 16$		$x > 4$
$n \in \mathbb{N}$	$n = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$		n soit impair
$n \in \mathbb{N}$	n soit divisible par 9		n soit multiple de 3
$\theta \in \mathbb{R}$	$\sin\theta = 0$		$\theta \equiv 0\ [2\pi]$

3 Fonctions

Dans toute cette section, E et F sont deux ensembles non vide quelconque.

3.1 Approche générale

Définition 34 - Une fonction comme un graphe.
Une fonction (ou une application) f de E dans F est la donnée d'un *graphe* $\mathcal{G}$, c'est-à-dire d'un sous-ensemble de $\mathcal{G}$ de $E \times F$ tels que

$$\forall x \in E, \exists!\, y \in F, \quad (x, y) \in \mathcal{G}.$$

- L'ensemble E est appelé l'*ensemble de définition de f*, et l'ensemble F l'*ensemble d'arrivée de f*.
- Tout élément $f(x)$, avec $x \in E$, est appelé une *valeur de f*.
- Pour tous $x \in E$ et $y \in F$ avec $y = f(x)$, on dit que y est L'*image de x par f* et que x est UN *antécédent de y par f*.

Ainsi, deux fonctions sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ, d'arrivée, et même graphe. On note $\mathcal{F}(E, F)$ (ou éventuellement F^E) l'ensembles des fonctions de E dans F.

Exemple 35 - Graphes et fonction.

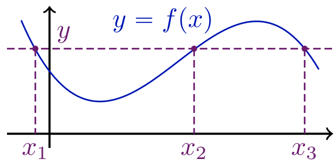
- Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\{(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ est-il (le graphe d')une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$? Et $\{(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, \pi]\}$?
- Expliquer pourquoi l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \frac{1}{x}\}$ ne décrit pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comment modifier cela pour obtenir une fonction ?

✎ **En pratique** ✎ Il est standard de représenter une fonction dans les deux cas suivants :

- Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}$. Son graphe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$ est alors appelé une courbe (d'équation $y = f(x)$). Vous en manipulez depuis des années.
- Une fonction entre deux ensembles finis. On parle de cadre *discret*, et on représente la fonction par un diagramme sagital, (c'est-à-dire avec des bulles reliées par des flèches). Illustration : dessinons le diagramme de la fonction

$$f : \{1, 2, \dots, 10\} \to \{0, 1\} \ \text{ définie par } \ f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

✖ **Attention !** ✖ Ci-contre, y possède plusieurs antécédents par f, c'est pourquoi on parle d'un antécédent et non de l'antécédent de y.



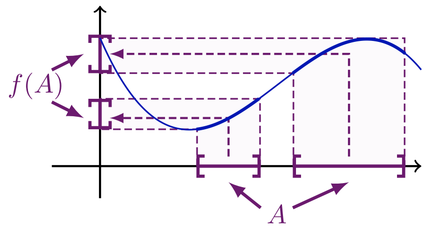
Définition 36 - Image d'une partie par une fonction, image d'une fonction.
Soit $f : E \to F$ une fonction.

- Pour toute partie A de E, on appelle *image (directe) de A par f*, notée $f(A)$, la partie définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image de E tout entier est simplement appelée *image de f* et généralement notée $\operatorname{Im} f$.

✎ **En pratique** ✎ L'image $f(A)$ de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A. Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour déterminer $f(A)$ graphiquement, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe de f qui se situe au-dessus de A.



Exemple 37

1. Déterminer l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer également $f([-1, 2[)$.
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Déterminer l'image de $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, de $[0, \pi]$, de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et de $[0, 2\pi]$ par f.
3. Déterminer l'image de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$.
4. Déterminer l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = e^{i\theta}$.
5. La fonction qui à tout entier associe son reste dans la division euclidienne par 3.

Remarque 38 - Fonction « à valeurs dans ». Soient $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Etant donnée une partie B de F, on dit que f est *à valeurs dans* B lorsque toute valeur de f est élément de B, *i.e.*

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B \quad \text{ou, autrement dit,} \quad \operatorname{Im} f \subset B.$$

✖ **Attention !** ✖ Dire que f est à valeurs dans B ne signifie en aucune façon que l'image de f est B. Par exemple, la fonction exponentielle est à valeurs réelles, mais seuls les réels strictement positifs sont atteints. C'est simplement une manière d'en dire un peu plus sur la fonction.

Il existe de nombreuses règles de calculs lorsque l'on mélange fonctions et ensembles. En voici quelques-unes qu'il est bon de savoir :

Exercice 39 Soit $f : E \to F$ une fonction, et A et B deux parties de E. Montrer les points suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

La définition suivante généralise celle déjà vue (deux fois) dans le cadre des fonctions réelles, mais son importance est telle qu'on ne peut l'éviter :

Définition 40 - Composition.
Soient E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. La *composée de f suivie de g* est la fonction $g \circ f : E \to G$ définie par

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Les diagrammes de composition déjà vus restent des outils pertinents, ainsi que les résultats vus dans le cadre réel : associativité, mais absence de commutativité (cette question n'a même pas de sens si $E \neq G$). Notez par ailleurs que pour une fonction $f : E \to F$, on a

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f.$$

Définition 41 - Image réciproque d'une partie par une fonction.
Soit $f : E \to F$ une fonction et $B \subset F$ une partie de F. On appelle *image réciproque* de B par f, et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Remarque 42

- Il s'agit tout simplement de l'ensemble des antécédants de B par f.
- L'ensemble $f^{-1}(B)$ est donc inclus dans E. Par définition d'une fonction, on a $f^{-1}(F) = E$.

✖ **Attention !** ✖ La notation f^{-1} n'a rien à voir a priori avec la notion de fonction réciproque : ici on ne calcule pas f^{-1} d'un élément (ce qui n'a aucun sens si f n'est pas bijective), mais f^{-1} d'un ensemble.

Exemple 43

1. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer les images réciproques suivantes :
   a. $f^{-1}(\mathbb{R})$, puis $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$.
   b. $f^{-1}([0,1])$, puis $f^{-1}([0,1[)$.
   c. $f^{-1}([-1,0])$, puis $f^{-1}([-2,-1])$.
   d. $f^{-1}([1,4])$.
   e. $f^{-1}(\{9\})$, puis $f^{-1}(\{0\})$. Pourquoi n'écrit-on pas $f^{-1}(9)$ (voir le "danger" ci-dessus) ?
2. Même question pour la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   a. $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$.
   b. $f^{-1}(\{0\})$.
   c. $f^{-1}(]-\infty, 2])$.
3. On considère à nouveau la fonction f qui à tout entier associe son reste dans la division euclidienne par 3. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^z$. déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$ et $f^{-1}(\{0\})$. (Indice : calculer $|f(z)|$).

✎ **En pratique** ✎ Etant donnée $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}$, et $B \subset \mathbb{R}$, saurez-vous trouver la méthode graphique pour déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B)$, analogue de celle permetant de trouver l'image directe ?

Encore des règles de calculs lorsque l'on mélange images réciproque et ensembles :

Exercice 44 Soit $f : E \to F$ une fonction, et A et B deux parties de F. Montrer les points suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Fonctions indicatrices

Définition 45 - Fonction indicatrice. Soit $A \subset E$, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ est définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 46

- Elle indique si un élément est dans A ou pas, d'où son nom.
- L'indicatrice de $\mathbb{R}^+$, sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est appelée fonction de Heavyside. Elle peut modéliser un signal qui démarre et reste constant à l'instant $t = 0$.

Exercice 47 - Fonction indicatrice et opérations ensemblistes. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux parties de E. Montrer les points suivants :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. **2.** $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$. **3.** $\mathbb{1}_{\complement_E A} = \mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A$. **4.** $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$

Restrictions et extensions On présente ici deux moyens de modifier une fonction : on ne change pas “ce que fait” la fonction, mais on change son espace d'arrivée !

Définition 48 - Restriction et prolongement. Soit $f : E \to F$ une fonction.

1. Soit $A \subset E$ une partie de E. La fonction $g : A \to F$, définie par
$$\forall x \in A, \quad g(x) = f(x),$$
est LA restriction de f à A. On peut la noter $f_{|A}$ (lire “f restreint à A”).
2. Soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. Une fonction $g : E' \to F$ telle que
$$\forall x \in E, \quad g(x) = f(x),$$
est UN *prolongement* de f à E'.

Remarque 49

- On a bien dit UN *prolongement* de f à E', car il peut y en avoir plusieurs, en fait un prolongement de f à E' peut prendre n'importe quelles valeurs sur $E' \backslash E$.
- La restriction peut avoir des propriétés que la fonction initiale n'a pas. Par exemple, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, mais ses restrictions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ le sont.
- On peut omettre le terme restriction si le contexte s'y prête, par exemple “la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est décroissante sur $]0, +\infty[$”.

Exercice 50

1. Que vaut la restriction de la fonction valeur absolue à $\mathbb{R}_+$?
2. Proposer un prolongement à $\mathbb{R}_+$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Familles d'éléments et partitions Les notions de familles et de partitions sont intuitives, mais une question revient souvent : "est-ce que l'ordre compte" ? Ce qui suit a pour but de définir rigoureusement ces notions.

Définition 51 - Famille d'éléments. Soit I un ensemble. Une application $u : I \to E$ est appelée une famille d'éléments de E indicée par I. On note $(u_i)_{i\in I}$ cette famille. Lorsque I est fini, on parle de famille finie.

Remarque 52

1. "Indicer" des éléments d'un ensemble est une manière d'établir une liste. Des éléments peuvent se répéter.
2. On distinguera bien la famille $(u_i)_{i\in I}$ de l'ensemble des images $\{u_i, i \in I\}$, pour lequel "l'ordre ne compte pas", et où les éléments ne sont pas répétés.
3. Si $I = [|1, n|]$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut tolérer la notation $(u_1, \dots, u_n)$. Il s'agit alors d'un n-uplet !
4. L'indice est muet, en effet il s'agit d'une variable servant à décrire une fonction. Ainsi, $(u_i)_{i\in I} = (u_j)_{j\in I}$
5. Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille est en fait une suite ! Des ensembles d'indice plus complexes sont possibles, par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mais cela reste marginal.

Définition 53 - Famille de parties. Soit I un ensemble. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, c'est-à-dire une famille de $\mathcal{P}(E)$. Alors on définit l'union et l'intersection des éléments de cette famille comme les sous-ensembles de E suivants :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in E_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} E_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in E_i\}.$$

On dit que la famille $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E lorsque

$$E = \bigcup_{i\in I} E_i \quad \text{et} \quad i \neq j \implies E_i \cap E_j = \varnothing.$$

Exercice 54 - Des suites d'intervalles.

1. Déterminer les unions suivantes :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}*} \left]0, 1 - \frac{1}{n}\right[, \quad \text{puis} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}*} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[\quad \text{et enfin} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}*} \left]2 - \frac{1}{n^2}, 3 - \frac{1}{n}\right[.$$
2. Déterminer les intersections suivantes
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}*} \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{puis} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}*} \left]0, \frac{1}{n}\right[.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n =]n, n+1[$. La famille d'intervalle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment-elles une partition de $\mathbb{R}$? Même question pour les intervalles $J_n = [n, n+1[$ et $K_n = [n, n+1]$.

3.2 Injections, surjections et bijections

Définition 55 - Injection. Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est injective (ou que f est une injection) si

$$\forall (x, x') \in E \times E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Remarque 56

- Une fonction est injective si et seulement si tout élément a au plus un antécédant (c'est-à-dire zéro ou un).
- De manière équivalente, par contraposition, f est injective si et seulement si

$$\forall (x, x') \in E \times E, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

- Une fonction $f : E \to F$ est injective si elle conserve les distinctions entre les éléments de E. On dit que l'ensemble E s'injecte dans F, on peut imaginer qu'il n'est pas plus gros que F (bien que cette vision ne soit pas rigoureuse).
- Comment voir graphiquement qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective ?

✖ **Attention !** ✖ Pour montrer qu'une fonction est injective, éviter de montrer que $x = y \implies f(x) = f(y)$, ce qui est vrai pour n'importe quelle fonction !

Exemple 57

1. Dire dans les cas suivants si la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est une injection :
   (i) $E = \mathbb{R}$. **(ii)** $E = \mathbb{R}_+$. **(iii)** $E = \mathbb{R}_-$.
2. Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique est-elle injective ? Et pour une fonction paire ?
3. La fonction qui à un entier associe son reste dans la division euclidienne par 5 est-elle injective ?

Proposition 58 Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Alors

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Proposition 59 Supposons $E \subset \mathbb{R}$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors f est injective.

La réciproque est fausse, pensez à une fonction qui “saute” (i.e. discontinue).

Définition 60 - Surjection. Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Remarque 61

- Une fonction est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédant, ou autrement dit est “atteint” par f. On peut parler de surjection de E **sur** F.
- Une fonction $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $F = f(E)$.
- Contrairement à la notion d'injection, le caractère surjectif dépend beaucoup de l'ensemble d'arrivée. Etant donné une fonction $f : E \to F$, on pourrait restreindre l'ensemble d'arrivée à $f(E)$, et réaliser ains une surjection de E sur $f(E)$. Mais cela n'a pas beaucoup d'intéret si on ne connait pas $f(E)$.
- Etant donné une fonction $f : E \to F$ surjective, on peut imaginer que l'ensemble E est “au moins aussi gros” que F, à travers f. Encore une fois, ce n'est qu'une vue de l'esprit.
- Comment voir graphiquement qu'une fonction est surjective ?

Exemple 62

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle une surjection ?
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$ est-elle une surjection ?
3. La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = e^z$ est-elle une surjection ? Et si on remplace l'espace d'arrivée par $\mathbb{C}^*$?

Proposition 63 Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Alors
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

La définition suivante a déjà été vue dans le cas des fonctions réelles :

Définition 64 - Bijection. Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est bijection (ou que f est une bijective) si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si

$$\forall y \in F, \exists\, !x \in E, \quad y = f(x).$$

On définit $f^{-1} : F \to E$ comme la fonction qui à tout élément de F associe son unique antécédant par f. On a alors

$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Remarque 65
- Une fonction est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a un unique antécédant, ou autrement dit est "atteint" par f d'une seule manière.
- Intuitivement, une bijection établit une correspondance exacte entre deux ensembles. On peut imaginer "qu'ils sont de la même taille", bien que cette idée cache beaucoup de subtilités et de paradoxes.

Entrainons-nous sur des exemples simples :

Exemple 66 - Exemples de fonctions bijectives et de fonctions réciproques. Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si oui, déterminer leur fonction réciproque.
1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ définie par $f(x) = e^{ix}$. Et si on remplace l'ensemble de départ par $[0, 2\pi[$?
3. La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + 7$. Et si on remplace l'ensemble de départ par $\mathbb{N}$?

Définition 67 - Identité. On appelle *identité de* E, notée Id_E, la fonction $\left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x. \end{array} \right.$

✖ **Attention !** ✖ Ne pas confondre une fonction indicatrice, à valeurs dans $\{0, 1\}$, avec l'identité $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x$.

Définition 68 - Réciproque. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors f est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B\,.$$

On a alors $g = f^{-1}$.

Les identités « $\forall x \in A, \quad g \circ f(x) = x$ » et « $\forall y \in B, \quad f \circ g(y) = y$ » expriment l'idée que g annule le travail de f et inversement.

Théorème 69 - Composition de bijection. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective, et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

On a aussi que f^{-1} et bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

✎ **En pratique** ✎ Etant donnée une fonction $f = E \to F$ voici quelques conseils stratégiques pour établir que f est une injection, une surjection ou une bijection. Dans tous les cas, la méthode "manuelle" consiste à considérer pour chaque $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$:

- Si cette équation a une solution, et ce pour tout $y \in F$, la fonction est surjective. N'en déduisez pas que vous avez trouvé $f^{-1}(y)$, car la fonction pourait ne pas être bijective, si une de ces équations a plusieurs solutions, auquel cas la fonction réciproque n'est pas définie.
- Si la solution de cette équation, **lorsqu'elle existe**, est unique, et ce pour tout $y \in F$, la fonction est injective.
- Lorsque ces deux critères sont réunis, la fonction est bien bijective, et on peut définir sa fonction réciproque. Si vous avez su résoudre l'équation $y = f(x)$, vous avez $f^{-1}(y)$. Il y a des cas où ne peut pas trouver de solution explicite.

Exercice 70 - Bilan. Reprendre les graphes de la section 5.1 du chapitre précédent, et décrire si les fonctions représentées sont injectives, ou surjectives. Donner des règles pour voir graphiquement si une fonction réelle est injective ou surjective.
Pour les fonction définies sur différents ensembles par $f(x) = x^2$ dans l'exemple 51, toujours dans la section 5.1 du chapitre précédent, dire lesquelles si elles sont injective, surjective, ou les deux.