Applications continues entre sphères

Sujet proposé par Christophe Bavard

christophe.bavard@math.u-bordeaux.fr

Présentation : Soit $\mathbf{S}^n$ la sphère unité de l'espace eucidien de dimension $n+1$. On étudiera les applications continues entre les sphères, en autorisant des déformations continues, ou *homotopies.* Ainsi, pour $k, n \geq 1$, les classes d'homotopie d'applications (pointées) de $\mathbf{S}^k$ dans $\mathbf{S}^n$ forment un groupe noté $\pi_k(\mathbf{S}^n)$. L'objectif du sujet est de détailler cette construction, puis de déterminer le groupe $\pi_k(\mathbf{S}^n)$ pour certaines valeurs de (k, n). On étudiera particulièrement une application fondamentale $h : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$, dite « fibration de Hopf », qui définit un élément non trivial du groupe $\pi_3(\mathbf{S}^2)$.

Pré-requis : Notions élémentaires de topologie et de géométrie différentielle.

Références

[1] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1966.

[2] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.

Topologie de $\mathbf{R}^n$

Sujet proposé par Christophe Bavard

christophe.bavard@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Soient X et Y des espaces topologiques. On suppose qu'il existe un plongement de X dans Y ; on dit alors qu'une propriété topologique est « un invariant de position » pour la paire (X, Y) si elle est vraie pour tous les plongements de X dans Y. Par exemple toutes les courbes fermées simples du plan (plongements du cercle dans le plan) séparent le plan d'après le théorème de Jordan. L'objectif du sujet est d'établir quelques résultats fondamentaux d'invariance de position concernant la topologie de $\mathbf{R}^n$: invariance du domaine de Brouwer, séparation de Borsuk, théorème de Jordan.

L'approche privilégiée sera élémentaire (approximation simpliciale des applications entre sphères, voir [1]). En fonction de l'avancement du sujet, cette approche pourra être complétée par une introduction à la topologie algébrique (plus précisément à l'homologie, voir [2, Ch. 1]), domaine qui vise à étudier les espaces topologiques en leur associant des objets algébriques (groupes, anneaux, etc).

Pré-requis : Notions élémentaires de topologie et éventuellement de théorie des groupes abéliens.

Références

[1] James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1966.

[2] James W. Vick. *Homology theory*, volume 145 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1994. An introduction to algebraic topology.

Le paradoxe de Banach-Tarski

Sujet proposé par Laurent Bessières

laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Le théorème de Banach-Tarski (1924) affirme qu'il est possible de découper une boule unité de $\mathbf{R}^3$ en un nombre fini de morceaux et, après les avoir déplacé par des isométries (affines) de $\mathbf{R}^3$, de les réassembler de manière à former *deux* boules unités disjointes.

Cet énoncé se généralise à $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, mais pas au plan $\mathbf{R}^2$. Le "paradoxe" disparaît une fois conçu que les morceaux ne sont pas mesurables. La construction utilise de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de $\mathbf{R}^3$.

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

Références

[1] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge university press.

[2] Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

Autour de la loi forte des grands nombres et du théorème central limite

Sujet proposé par Michel Bonnefont

Michel.Bonnefont@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Le but du mémoire sera de prouver la loi forte (et la loi faible) des grands nombres sous différentes hypothèses (L^4, L^2 ou même L^1) ainsi que le théorème de Lévy et le théorème central limite (avec les preuves par Lévy et par Berry-Esseen). Il faudra également proposer des simulations informatiques illustrant ces résultats.

Références

[1] P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilité*, Nouvelle ed., EDP Sciences (2007).

Suites de composition, extensions

Sujet proposé par Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Présentation : Si G est un groupe fini, il est facile de montrer qu'il admet une suite de Jordan-Hölder : une suite de sous-groupes

$$\{e\} \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_r = G$$

telle que N_{i-1} soit distingué dans N_i et N_i/N_{i-1} soit simple pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Le premier objectif du TER est de prouver le théorème de Jordan-Hölder : à l'ordre près, les sous-quotients N_i/N_{i-1} ne dépendent pas de la suite de Jordan-Hölder considérée. Cela montre qu'on dispose d'une bonne notion de « facteurs simples » d'un groupe fini. On étudiera ensuite les *groupes résolubles*, qui corresponentd au cas où ces facteurs sont tous cycliques.

Dans un second temps, on prouvera un théorème de Hall. Il s'agit d'une version renforcée du théorème de Sylow, pour les groupes résolubles : si G est un groupe résoluble d'ordre ab avec $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors G contient un sous-groupe d'ordre a ; en outre, les sous-groupes d'ordre a sont conjugués.

Si le temps le permet, on s'intéressera en outre au problème des extensions de groupes. On introduiera en particulier le produit en couronnes de deux groupes (cette notion permet de décrire les sous-groupes de Sylow des groupes symétriques), et on montrera le théorème de Kaloujnine-Krasner : Si H et K sont deux groupes avec K fini, le produit en couronnes $H \wr K$ contient toutes les extensions de H par K (*ie* tout groupe G contenant H comme sous-groupe distingué et tel que $G/H \simeq K$ est isoorphe à un sous-groupe de $H \wr K$).

Pré-requis : Notions élémentaires de théorie des groupes.

Références

[1] J. Calais, *Éléments de théorie des groupes*, PUF.

[2] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics **148**, Springer.

Équations différentielles : le point de vue corporel

Sujet proposé par Olivier Brinon

olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : La théorie des extensions de corps permet facilement de montrer que certaines constructions géométriques (trisection d'un angle, quadrature du cercle) sont impossibles en utilisant seulement une règle (non graduée) et un compas. De façon analogue, il est possible de montrer que la fonction $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive s'exprimant avec « les fonctions élémentaires ». On travaille pour cela avec des extensions de corps différentiels (*i.e.* des corps munis d'une dérivation). Le but du TER est de présenter les rudiments de cette théorie et de démontrer le résulté mentionné ci-dessus.

Pré-requis : Extensions de corps.

Références

[1] van der Put, Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Springer (2003).

[2] Sujet du concours d'entrée aux Écoles normales supérieures (Lyon-Cachan) 1995.

Le freinage à vélo

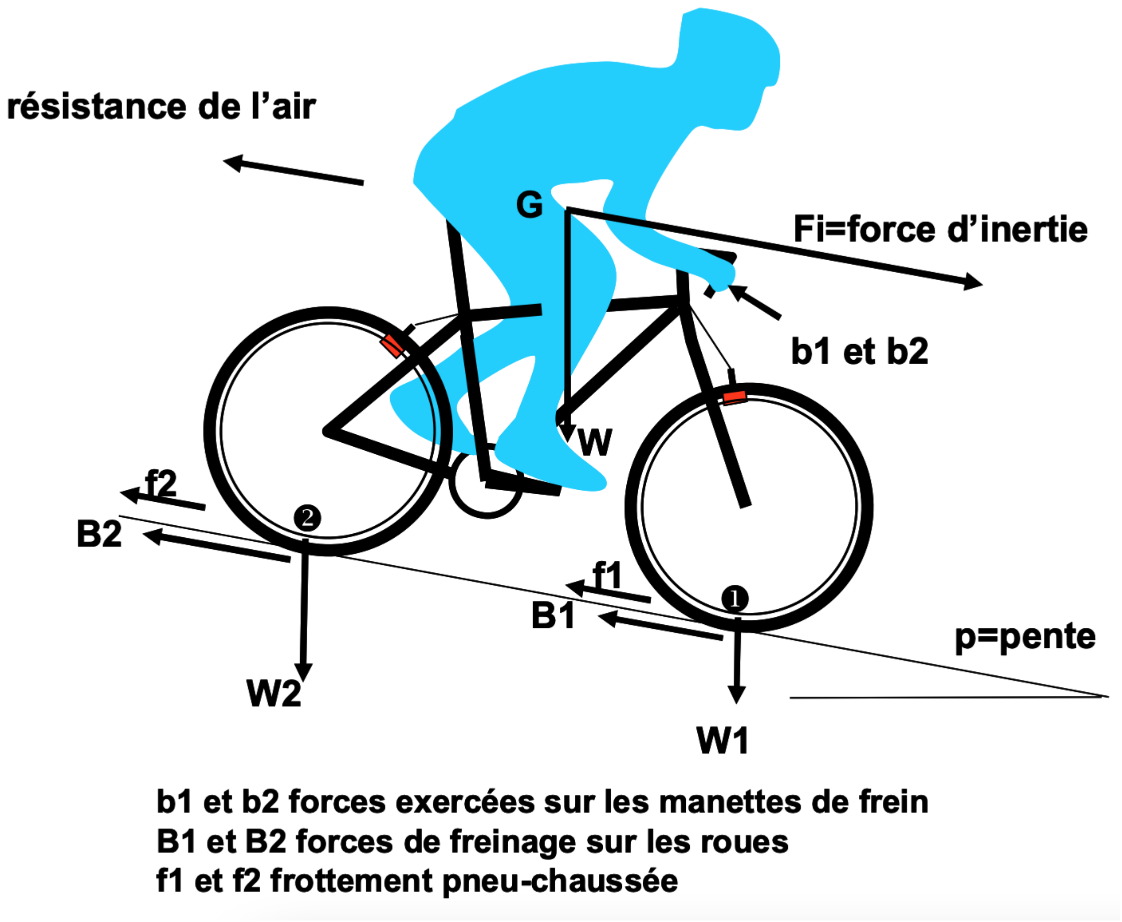
Sujet proposé par Sylvain Golénia

Sylvain.Golenia@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : La question de l'optimisation du freinage se pose. Faut-il freiner du frein avant ? du frein arrière ? des deux ? Progressivement ?

Ce sujet vous invite à investiger ces questions. La partie physique étant légère, on se concentrera sur l'étude analytique et numérique de certaines équations différentielles.



Actions de groupes

Sujet proposé par Florent Jouve

florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Présentation : L'objectif du projet est d'étudier diverses propriétés d'actions de groupes transitives, notamment :

(1) le théorème d'Iwasawa qui donne un critère permettant de démontrer que pour tout corps k ayant au moins 4 éléments, le quotient de $\mathrm{SL}_2(k)$ par son centre est un groupe simple,

(2) le théorème de Weisner affirmant que si G est un groupe fini d'ordre multiple d'un nombre premier p, alors, pour tout p-sous-groupe H de G, le nombre de p-sous-groupes intermédiaires $H \subset K \subset G$ de taille fixée est $\equiv 1 \bmod p$ (ce qui généralise le théorème de Sylow où H est trivial et K parcourt les p-sous-groupes de Sylow de G),

(3) d'autres généralisations des théorèmes de Sylow (notamment le fait que pour tout diviseur de la forme p^d, avec p premier et $d \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, de l'ordre d'un groupe fini G, tout sous-groupe d'ordre p^{d-1} de G est d'indice p dans un sous-groupe de G).

Références

[1] Keith Conrad, *More on the Sylow Theorems*, `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/sylowmore.pdf`.

[2] Keith Conrad, *Transitive group actions*, `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/transitive.pdf`.

Fonctions harmoniques, équations de Laplace et de Poisson

Sujet proposé par Stanislav Kupin

skupin@math.u-bordeaux.fr

Présentation : Soit D un domaine de $\mathbf{R}^2$ (ou de $\mathbf{R}^3$) avec un bord suffisamment régulier. Posons

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Considérons l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u\big|_{\mathrm{bord}(D)} = f. \end{cases} \tag{1}$$

Cette équation s'appelle équation de Laplace (avec une condition au bord) ; elle présente un exemple simple (et classique) d'équation aux dérivées partielles d'ordre 2.

Le projet en question consiste à étudier les équations du type (1) (homogènes et non-homogènes) et donner leur solutions selon le livre [Strauss, 2008, chap. 6].

Références

[1] W. Strauss, Partial Differential Equations : an Introduction, Wiley & Sons, NY (2008)

Théorème du point fixe de Brouwer

Sujet proposé par Pierre Lezowski

pierre.lezowski@u-bordeaux.fr

Présentation : Le théorème du point fixe de Brouwer est un théorème d'existence de point fixe pour une fonction f, c'est-à-dire de point x tel que $f(x) = x$. Ce théorème a plusieurs formulations, plus ou moins générales. L'une d'entre elles est la suivante :

Toute fonction continue du disque fermé dans lui-même admet un point fixe.

Ce théorème a de nombreuses applications. Il permet par exemple de démontrer le théorème de Jordan, le théorème de Perron-Frobenius, des résultats d'équilibre en théorie des jeux, ou encore l'existence de solutions d'équations aux dérivées partielles.

Le but de ce projet sera de démontrer le théorème du point fixe de Brouwer de plusieurs façons, et d'en voir quelques applications. La démonstration élémentaire [1] repose sur le jeu hex. On peut aussi utiliser des techniques de calcul différentiel.

Références

[1] D. Gale, *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, 1979 - Issue 10, pages 818-827.

[2] C.A. Rogers, *A Less Strange Version of Milnor's Proof of Brouwer's Fixed-Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, 1980, Issue 7, pages 525-527.

[3] M. Aigner et G.M. Ziegler, *Raisonnements divins*, Springer, 2006.

[4] D. Leborgne, *Calcul différentiel et Géométrie*, Presses Universitaires de France, 1982.

Polynômes symétriques

Sujet proposé par Qing Liu

Qing.Liu@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Un polynôme symétrique à $n \geq 1$ variables est un polynôme $P(X_1, \ldots, X_n)$ qui est invariant par toute permutation des variables X_i. Par exemple $s_1 := X_1 + \cdots + X_n$, $s_n := X_1 X_2 \cdots X_n$ sont symétriques.

Le but du travail est de montrer le théorème fondamental des polynômes symétriques qui énonce que tout polynôme symétrique peut s'exprimer polynomialement en fonction des n polynômes symétriques dits éléémentaires (dont les s_1, s_n ci-dessus font partie). On explicitera ce théorème dans des situations concrètes.

Références

[1] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, Volume 1 : algèbre*, Masson.

THÉORÈME SPECTRAL POUR DES OPÉRATEURS BORNÉS

Sujet proposé par Laurent Michel

laurent.michel@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Le but de ce stage est définir un calcul fonctionnel pour des opérateurs linéaires continus. Étant donnée une fonction continue de la variable réelle f et une application linéaire continue A on donnera une définition de $f(A)$ qui possède de bonnes propriétés ($f \mapsto f(A)$ morphisme). On utilisera ce calcul pour résoudre certaines équations différentielles.

Références

[1] Reed-Simon, *Methods of modern mathematical physics*, tome 1

Théorème de Hille-Yosida

Sujet proposé par Laurent Michel

laurent.michel@math.u-bordeaux.fr

Sujet déjà pris

Présentation : Le but de ce stage est de démontrer un resultat d'existence et d'unicité pour des équations du type $\frac{du}{dt} = Au$ lorsque A est un opérateur linéaire non borné (c'est-à-dire non continu). L'exemple typique est l'équation de la chaleur (ou de Schrodinger). La démonstration de ce résultat repose sur un procédé de régularisation et utilise des techniques d'analyse hilbertienne.

Références

[1] Brezis, *Analyse fonctionnelle*

Théorème de Tonelli d'existence de minimiseur

Sujet proposé par Philippe Thieullen

philippe.thieullen@u-bordeaux.fr

Présentation : En théorie du calcul des variations, on s'intéresse au problème de minimisation d'une fonctionnelle (longueur, aire, énergie...) sur un espace de dimension infinie de fonctions. Il est alors essentiel de définir très précisément, d'une part l'espace fonctionnel sur lequel on recherche les minimiseurs, et d'autre part les notions de convergence permettant d'obtenir des critères de semi-continuité inférieure séquentielle et des critères de compacité séquentielle. On se propose de comprendre le problème de minimisation de Tonelli qui consiste à obtenir les équations usuelles de la mécanique par minimisation de la fonctionnelle d'action (énergie cinétique moins énergie potentielle), ou plus généralement qui consiste à déterminer les minimiseurs de toute fonctionnelle convexe en la variable des dérivées des fonctions.

Pré-requis : Un cours de calcul d'intégration et différentiel

Étapes du stage : Dans une première partie on montrera l'équivalence entre fonctions absolument continues sur $\mathbf{R}$ et fonctions généralisées au sens de Sobolev. Dans une deuxième partie on montrera le théorème de Tonelli de semi-continuité inférieure et d'existence de minimiseurs sur l'espaces des fonctions absolument continues. On s'appuiera sur les chapitres 2 et 3 de la référence ci-dessous.

Références

[1] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems. An Introduction*, Oxford Lecture Series in Mathematics ans its Applications, Clarendon Press, Vol. 15, 1998.