

# Sujets de projets tutorés L3 parcours mathématiques fondamentales

2023-2024

## Table des matières

Sujet 1 : Le paradoxe de Banach-Tarski . . . . .	2
Sujet 2 : La proportion des dérangements dans un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	3
Sujet 3 : Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ? . . . . .	4
Sujet 4 : Groupes simples de petit ordre . . . . .	5
Sujet 5 : Produits en couronnes, $p$ -Sylow des groupes symétriques et extensions . . . . .	6
Sujet 6 : Le problème du collectionneur . . . . .	7
Sujet 7 : Méthode probabiliste et graphes . . . . .	8
Sujet 8 : Itération de projections . . . . .	9
Sujet 9 : Le test de primalité de Solovay-Strassen . . . . .	10
Sujet 10 : Le problème de Sturm-Liouville . . . . .	11
Sujet 11 : Intégrales oscillantes et applications . . . . .	12

## Sujet 1

### *Le paradoxe de Banach-Tarski*

Sujet proposé par Laurent Bessières

[laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr](mailto:laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Le théorème de Banach-Tarski (1924) affirme qu'il est possible de découper une boule unité de  $\mathbf{R}^3$  en un nombre fini de morceaux et, après les avoir déplacé par des isométries (affines) de  $\mathbf{R}^3$ , de les réassembler de manière à former *deux* boules unités disjointes.

Cet énoncé se généralise à  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , mais pas au plan  $\mathbf{R}^2$ . Le « paradoxe » disparaît une fois conçu que les morceaux ne sont pas mesurables. La construction utilise de manière cruciale l'axiome du choix et l'existence d'un groupe libre non abélien d'isométries de  $\mathbf{R}^3$ .

**Pré-requis :** Notions élémentaires de théorie des groupes, géométrie vectorielle.

## Références

- [1] Stan Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press.
- [2] Karl Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, dans *The American Mathematical Monthly*, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.

## Sujet 2

### *La proportion des dérangements dans un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$*

Sujet proposé par Margaret Bilu

[margaret.bilu@math.u-bordeaux.fr](mailto:margaret.bilu@math.u-bordeaux.fr)

Une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est appelée *dérangement* si elle n'admet aucun point fixe, c'est-à-dire si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\sigma(i) \neq i$ . La proportion des permutations dans  $\mathfrak{S}_n$  qui sont des dérangements peut être exprimée à l'aide de la formule du crible, et vaut  $\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$  (en particulier, c'est une approximation rationnelle de  $\frac{1}{e}$ ). Soit maintenant  $G$  un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ , et soit  $C$  une classe à gauche de  $G$ , c'est-à-dire un ensemble de la forme  $aG$  pour un certain  $a \in \mathfrak{S}_n$ . Le but de ce projet est de comprendre le résultat principal de [PS22], qui dit que si la proportion de dérangements de  $C$  est égale à celle dans  $\mathfrak{S}_n$  tout entier donnée plus haut, alors en fait  $G = C = \mathfrak{S}_n$ . Autrement dit, la proportion de dérangements caractérise, en quelque sorte,  $\mathfrak{S}_n$ . Le même résultat reste vrai pour le groupe alterné et pourra être abordé dans un second temps. La démonstration est essentiellement d'ordre arithmétique, et permettra de découvrir quelques résultats d'approximation de la constante  $e$  par des rationnels.

**Prérequis** : Un peu de théorie des groupes. Groupe symétrique. Arithmétique élémentaire.

## Références

- [PS22] B. Poonen, K. Slavov, The proportion of derangements characterizes the symmetric and alternating groups, Bull. Lond. Math. Soc. 54 (2022), no. 4, 1439–1447, <https://doi.org/10.1112/blms.12639>

### Sujet 3

*Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?*

Sujet proposé par Michel Bonnefont

[Michel.Bonnefont@math.u-bordeaux.fr](mailto:Michel.Bonnefont@math.u-bordeaux.fr)

**Sujet déjà pris**

Le but de ce travail de TER est de comprendre un modèle de mélanges de carte probabiliste et d'essayer de comprendre sa vitesse de convergence vers la distribution uniforme qui représente un jeu parfaitement mélangé. Des simulations seront également demandées.

### Références

- [1] Ph. Biane, *Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?*, Gazette de la SMF, Janvier 2002.

## Sujet 4

### *Groupes simples de petit ordre*

Sujet proposé par Olivier Brinon

[olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr](mailto:olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Si  $G$  est un groupe fini, il est facile de montrer qu'il existe une suite de sous-groupes

$$\{e\} \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_r = G$$

telle que  $N_{i-1}$  soit distingué dans  $N_i$  et  $N_i/N_{i-1}$  soit simple pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  : les groupes finis sont donc « extensions » successives de groupes simples, qui apparaissent comme les « briques » élémentaires des groupes finis. On sait bien sûr que les groupes simples abéliens sont cycliques d'ordre premier : on aimerait « comprendre » les groupes simples non abéliens. On en connaît déjà une infinité : les groupes alternés  $\mathfrak{A}_n$  pour  $n \geq 5$ . La question de la classification générale des groupes finis simples est un problème très difficile (qui n'a été complètement résolu que relativement récemment). Le but du TER est de comprendre pourquoi les seuls ordres possibles pour un groupe simple non abélien d'ordre  $\leq 1000$  sont 60, 168, 360, 504 et 660. Pour cela, on démontrera une série de petits lemmes qui permettent de montrer la non simplicité de groupes pour beaucoup d'ordres, ainsi que la simplicité des groupes  $\mathrm{PSL}(n, \mathbf{F}_q)$  (sauf si  $n =$  et  $q \in \{2, 3\}$ ). Chemin faisant, on pourra éventuellement prouver des isomorphismes exceptionnels, voire des résultats d'unicité à isomorphisme près.

**Pré-requis** : Structures algébriques 2.

## Références

- [1] I. M. Isaacs, *Finite group theory*, Graduate studies in mathematics **92**, AMS.
- [2] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses.
- [3] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate texts in mathematics **148**, Springer.

## Sujet 5

### *Produits en couronnes, $p$ -Sylow des groupes symétriques et extensions*

Sujet proposé par Olivier Brinon

[olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr](mailto:olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Le but du TER est de définir et décrire les produits en couronnes de deux groupes (finis). Il s'agit d'un type particulier de produit-semi-directs. Une belle application est la construction des  $p$ -Sylow des groupes symétriques (théorème de Kaloujnine). Une autre application est le fait que les extensions de deux groupes (finis) se réalisent toutes comme sous-groupes de leur produit en couronne relativement à l'action régulière (théorème de Kaloujnine-Krasner).

**Pré-requis :** Structures algébriques 2.

## Références

- [1] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate texts in mathematics 148, Springer.

## Sujet 6

### *Le problème du collectionneur*

Sujet proposé par Marie-Line Chabanol

[Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr](mailto:Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Vous avez peut-être déjà essayé de collectionner des objets (figurines, cartes, etc)... Combien de temps cela prend-il de récupérer une collection complète d'objets si on suppose qu'on les récupère de manière aléatoire ? Et si on veut deux collections complètes, qu'est-ce que cela change ?

But : Le but sera de voir ce qu'on peut dire de la loi de ce temps (espérance, variance...), pour diverses modélisations. On pourra aussi s'intéresser à diverses variantes du problème. On pourra aussi faire diverses expérimentations numériques.

**Pré-requis** : Un goût pour les probabilités discrètes et l'analyse. Groupe mixte MathInfo/MathFonda bienvenu.

## Références

- [1] S. Sardy, Y. Velenik, *Petite collection d'informations utiles pour collectionneur compulsif*, disponible à l'adresse <https://hal.science/hal-00586348/document>
- [2] Page wikipedia "Coupon collector's problem" et les références qui y sont mentionnées.
- [3] I. Adler, S. Oren et S.M. Ross, *The coupon-collector's problem revisited*, J. Appl. Probab. **40** (2003), no. 2, pp.513-518.
- [4] P. Erdős, A. Rényi, *On a classical problem of probability theory* (1961).
- [5] D. Zeilberger, *How many singles, doubles, triples, etc., should the coupon collector expect ?* (2001)

## Sujet 7

### *Méthode probabiliste et graphes*

Sujet proposé par Marie-Line Chabanol

[Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr](mailto:Marie-Line.Chabanol@u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Il est parfois difficile de montrer l'existence d'un objet ayant une certaine propriété ; mais on arrive paradoxalement parfois plus facilement à montrer que si on prend un objet au hasard, il a cette propriété avec une probabilité strictement positive. Cette approche, qui a pris le nom de "méthode probabiliste", a été en particulier très efficace pour des problèmes en théorie des graphes, notamment des problèmes de coloration de graphes. Elle peut également parfois être ensuite utilisée pour donner lieu à un algorithme explicite de construction d'un objet : on parle alors de dérandomisation.

**Pré-requis :** Un goût pour les mathématiques discrètes en général et un goût a priori pour les probabilités (même si aucune familiarité avec celles-ci n'est requise)

## Références

- [1] Aigner et Ziegler, *Raisonnements divins*, chapitre 40 (peut dépendre des éditions)
- [2] J. Zhou, *The method of conditional probabilities : derandomizing the probabilistic method*, disponible à l'adresse <http://math.uchicago.edu/may/REU2018/REUPapers/Zhou,James.pdf>



## Sujet 8

### *Itération de projections*

Sujet proposé par Philippe Jaming

[Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr](mailto:Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr)

La projection orthogonale a été introduite dans le cadre des espaces euclidiens en cours de L2 et son extension à la dimension infinie est un objet central du cours sur les espaces de Hilbert (et sera introduit dès les premières semaines de ce cours).

L'objet de ce TER est de considérer des itérations de projections orthogonales. Par exemple, si  $P_E$  et  $P_F$  sont les projections orthogonales sur deux sous-espaces (fermés dans un Hilbert  $H$ ), on peut montrer que  $(P_E P_F)^n$  converge vers  $P_{E \cap F}$  et plus généralement, si  $P_{E_i}$  est la projection orthogonale sur  $E_i$ , alors  $(P_{E_1} P_{E_2} \cdots P_{E_m})^n$  converge vers la projection orthogonale sur  $A = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_m$ . En d'autres termes, si  $x_0 \in H$  et  $x_{n+1} = P_{E_1} P_{E_2} \cdots P_{E_m} x_n$  alors  $x_n \rightarrow P_A x_0$ . (Cela conduit à l'algorithme de Kaczmarz de résolution des systèmes linéaires qui est le premier objectif de ce travail.) On note alors que l'ordre dans lequel on liste ces projections n'a aucune influence. On peut alors se poser la question de comprendre ce qui se passe lorsqu'on change cet ordre à chaque itération. Le cas de la dimension infinie est ici très différent de celui de la dimension finie.

## Sujet 9

### *Le test de primalité de Solovay-Strassen*

Sujet proposé par Florent Jouve

[florent.jouve@math.u-bordeaux.fr](mailto:florent.jouve@math.u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Un *test de primalité* est un algorithme prenant en entrée un entier  $n$  et dont le but est de vérifier si  $n$  est ou non un nombre premier. Ces tests sont très utiles, par exemple pour produire de grands nombres premiers servant ensuite en cryptographie. Parmi les tests de primalité les plus standard, beaucoup sont « probabilistes », c'est-à-dire qu'ils ne parviennent à garantir la primalité de l'entier testé qu'avec une certaine probabilité (que l'on cherche bien sûr à estimer et à rendre aussi proche de 1 que possible).

Le projet consiste en l'étude de l'un de ces tests, déduit de travaux de Solovay et Strassen, et reposant sur les propriétés des symboles de Legendre et Jacobi : si  $a \in \mathbb{Z}$  et  $p \geq 3$  est un nombre premier non facteur de  $a$ , alors  $a^{(p-1)/2}$  vaut  $\pm 1$  modulo  $p$  suivant que  $a$  est ou non un carré modulo  $p$ . La validité de cette propriété, si l'on souhaite l'étendre à la quantité  $a^{(n-1)/2}$  modulo  $n$  où  $n$  est l'entier (impair) dont on souhaite tester la primalité, est au coeur de la méthode.

## Références

- [1] K. Conrad, *The Solovay-Strassen test*, disponible à l'adresse <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/solovaystrassen.pdf>.
- [2] J. von zur Gathen et J. Gerhard, *Modern computer algebra* (chapitre 18), Cambridge University Press.

## Sujet 10

### *Le problème de Sturm-Liouville*

Sujet proposé par Chantal Menini

[Chantal.Menini@math.u-bordeaux.fr](mailto:Chantal.Menini@math.u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Étant donné des fonctions  $Q$  et  $f$  définies et continues sur  $[0, 1]$ , on sait que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} -y'' + Qy = f \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $[0, 1]$ .

Qu'en est-il lorsqu'on modifie les conditions au bord et que l'on considère le problème

$$\begin{cases} -y'' + Qy = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0 \end{cases}$$

avec  $a, b, c, d$  réels donnés ?

Pour étudier ce problème dans le cas général on se placera sur l'espace préhilbertien des fonctions continues sur  $[0, 1]$  muni du produit hermitien  $(f, g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$  et on utilisera des outils d'analyse fonctionnelle tels que étude d'opérateur linéaire, orthogonalité, décomposition selon une famille de vecteurs.

On pourra aussi étudier des cas particuliers qui ont des applications intéressantes.

**Pré-requis :** Connaissances de L2 sur les suites et séries numériques et de fonctions, algèbre linéaire et bilinéaire de L2, quelques résultats d'intégration de L3, notions sur les espaces préhilbertiens.

Référence de base qui sera à compléter (envoi du pdf sur demande) :

## Références

[1] R. Antetomaso, *Le problème de Sturm-Liouville*, RMS 105 (1995).

## Sujet 11

### *Intégrales oscillantes et applications*

Sujet proposé par Philippe Thieullen

[philippe.thieullen@u-bordeaux.fr](mailto:philippe.thieullen@u-bordeaux.fr)

Sujet déjà pris

Le but du mémoire est d'étudier le comportement asymptotique d'intégrales oscillantes, c'est-à-dire d'intégrales de fonctions qui sont modulées par un cosinus ou sinus de phase variable. Comme application on étudiera le comportement asymptotique de points d'un réseau dans une boule.

Le mémoire développera des outils classiques de l'analyse de Fourier. La référence proposée est complète et ne nécessite pas d'autres lectures. Il s'agit d'étudier le chapitre 1 de [1]. La section 0 est un rappel ou complément de théorèmes classiques en analyse de Fourier qui pourra servir de support aux énoncés utilisés de la section 1.

## Références

- [1] C. Sogge, *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge University Press. Seconde édition (2017)